Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s17/h)
Семинар 9 (15.03.2018)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Линейные уравнения первого порядка

Определение 1. Уравнение вида
$$y' = a(x)y \tag{1}$$
называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение
$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2}$$
называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 1. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 1. (*) Решить уравнение (1) в общем виде.

Замечание 2. *Уравнение* (2) *превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*
$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

Задача 2. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;
(b) $xy' - 2y = 2x^4$;
(c) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;
(d) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$;
(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;
(f) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Разное

Задача 3. Построить фазовые портреты для следующих уравнений:

(a) $\ddot{x} = 4x^3 - 4x$
(b) $\ddot{x} = -4x^3 + 4x$
(c) $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x$
(d) $\ddot{x} = -x^3 + x^2 + 2x$

Задача 4. Найти все решения уравнения $\dot{x} = t^2 - 2tx + x^2 + 1$ с начальным условием $x(9) = 9$, если они существуют.

Задача 5. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы
$$\dot{x} = 6x^4, \quad \dot{y} = -7y \tag{3}$$
с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 6$.

Найти $\inf_t y(t)$ и $\sup_t y(t)$, где инфимум и супремум берутся по всем t, при которых решение определено.

Задача 6. Рассмотрим систему
$$\dot{x} = 5xz, \quad \dot{y} = -6y, \quad \dot{z} = 0.$$
Найти все начальные условия, при которых решение имеет конечный предел при $t \to +\infty$.

Задача 7. Найти все значения α, при которых система имеет непостоянный непрерывный первый интеграл в окрестности $(0, 0)$.
$$\dot{x} = \alpha x, \quad \dot{y} = (1 - \alpha)y.$$