Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s17/h)
Семинар 7. Первые интегралы (1.03.2018)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Первые интегралы и производная вдоль векторного поля

Задача 1. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

(a) $(2, 3)$; (b) (x, y); (c) (y, x); (d) $(1, -e^y)$;

Задача 2. [2]

Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

Задача 3. Частично основано на [2].

Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \qquad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \qquad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}.$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1 + y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1 + y^2}, \end{cases} \qquad F(x, y) = xy - \sqrt{1 + y^2}$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \qquad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz$

Линейные уравнения первого порядка и интегрирующий множитель

Определение 1. Уравнение вида

$$y' = a(x)y \tag{1}$$

называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2}$$

называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 1. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 4. (*) Решить уравнение (1) в общем виде.

Замечание 2. *Уравнение* (2) *превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*

$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

Задача 5. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;
(b) $xy' - 2y = 2x^4$;
(c) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;
(d) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$;
(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;
(f) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.