

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год  
 Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)  
 Семинар 6. Уравнения в полных дифференциалах (22.02.2018)  
 И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

## Дифференциальные 1-формы как они есть

**Определение 1.** Дифференциальной 1-формой называется функция  $\omega: U \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  от двух аргументов: точки  $P$  из области  $U$  в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  и вектора  $v$  из  $n$ -мерного линейного пространства  $V_n$ . Функция  $\omega$  должна быть линейной по второму аргументу.

Другой способ думать о дифференциальной 1-форме: это *ковекторное поле*, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $P \in U \subset \mathbb{R}^n$  некоторый линейный функционал на векторном пространстве  $V_n$ .

**Задача 1.** Пусть  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^n$  и  $v = (v_x, v_y) \in V_2$ . Какие из следующих функций являются 1-формами?

- (a)  $\omega(P, v) = x + y$ ; (c)  $\omega(P, v) = v_x + v_y + 1$ ; (e)  $\omega(P, v) = x^2v_x + y^2v_y$ ;  
 (b)  $\omega(P, v) = v_x$ ; (d)  $\omega(P, v) = x v_x v_y$ ; (f)  $\omega(P, v) = x v_x v_y$ .

**Замечание 1.** Множество ковекторов образует линейное пространство. В качестве его базиса можно выбрать «координатные функционалы». Например, для вектора  $v = (v_x, v_y) \in V_2$  можно определить функционалы  $dx(v) = v_x$  и  $dy(v) = v_y$ . Они являются базисом в пространстве линейных функционалов на двумерном векторном пространстве.

Теперь 1-форму

$$\omega(P, v) = x^2v_x + y^2v_y$$

можно записать в виде

$$\omega(x, y) = x^2dx + y^2dy$$

**Замечание 2.** С дифференциальным уравнением вида  $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  можно связать дифференциальную форму

$$\omega = f(x, y)dx - g(x, y)dy,$$

где  $dx(v) = v_x$ ,  $dy(v) = v_y$  — соответствующие базисные функционалы.

**Задача 2.** Найти форму, соответствующую уравнению, и построить её поле направлений. Сравнить с полем направлений для исходного уравнения.

- (a)  $y' = y$ ; (b)  $y' = y/x$ ; (c)  $y' = -y/x$ ; (d)  $y' = -x/y$ .

## Уравнения в полных дифференциалах

**Определение 2.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция. Её *дифференциалом* называется дифференциальная 1-форма  $df(x, v)$ , для которой справедливо следующее:

$$f(x + v) = f(x) + df(x, v) + o(|v|).$$

**Теорема 3.** Если дифференциал существует, то он записывается в виде

$$df(x, v) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1(v) + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n(v),$$

где  $dx_k$  — координатный функционал, то есть функционал, принимающий на векторе  $v = (v_1, \dots, v_n)$  значение  $dx_k(v) = v_k$ .

Обычно зависимость от  $v$  не указывают и пишут просто:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n$$

**Задача 4.** Для следующих функций  $f(x, y)$

- найти дифференциал  $df$ ;
- построить линии уровня  $f(x, y) = \text{const}$ ;
- построить поле направлений, заданное уравнением  $df = 0$ .

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;      (b)  $f(x, y) = xy$ ;      (c)  $f(x, y) = x - y^2$ ;      (d)  $f(x, y) = e^{x^2+4y^2}$ .

**Задача 5.** (\*) Доказать, что поле направлений, заданное уравнением  $df = 0$ , в каждой точке касается линий уровня функции  $f$ .

**Определение 3.** Уравнение

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция  $H(x, y)$ , что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом  $dH(x, y)$ , то есть  $F(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$  и  $G(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}$ .

**Замечание 3.** Интегральными кривыми уравнения (1) являются линии уровня функции  $H$ .

**Теорема 6.** Уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ .

**Задача 7.** Доказать

- (a) необходимость в теореме 6.  
 (b) (\*) достаточность в теореме 6.

**Замечание 4.** Если выполняется условие теоремы 6, функцию  $H$  можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию  $F$  по  $x$ , полагая  $y$  фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от  $y$ , и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение  $\frac{\partial H}{\partial y} = G$ .

**Задача 8.** Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

- (a)  $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$ ;      (c)  $\dot{x} = \frac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)}$ ;  
 (b)  $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$ ;      (d)  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ .