Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s17/h)
Семинар 5. Ещё о многомерных уравнениях (15.02.2018)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Теорема 1. *Рассмотрим автономную систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

и неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Для любой точки (x_0, y_0), такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, фазовые кривые автономной системы совпадают с интегральными кривыми соответствующего неавтономного уравнения.

Задача 2. (*) Доказать теорему 1 с помощью теорем о производной обратной и сложной функции.

Задача 3. Для следующих систем уравнений:
- записать соответствующее неавтономное уравнение, решить его, построить поле направлений и интегральные кривые;
- убедиться в том, что теорема 1 работает.

(a) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$; (b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$; (c) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$; (d) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$.

Задача 4. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1$; (b) $\ddot{x} = x$; (c) $\ddot{x} = \dot{x}$; (d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x$.

Задача 5. Рассмотрим *модель Лотки—Вольтерра*, описывающую динамику популяции хищников (y) и их жертв (x):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Найти все особые точки векторного поля, соответствующего уравнению (1).
(b) Нарисовать векторное поле (1).
(c) Нарисовать эскиз фазовых кривых. Проинтерпретировать их вид в терминах исходной модели.
(d) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
(e) Решить полученное уравнение.
(f) Нарисовать фазовые кривые системы (1).
(g) Проинтерпретировать полученные результаты в терминах исходной модели.

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция $\omega\colon U \times V_n \to \mathbb{R}$ от двух аргументов: точки P из области U в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и вектора v из n-мерного линейного пространства V_n. Функция ω должна быть линейной по второму аргументу.

Другой способ думать о дифференциальной 1-форме: это *ковекторное поле*, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $P \in U \subset \mathbb{R}^n$ некоторый линейный функционал на векторном пространстве V_n.

Задача 6. Пусть $P = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ и $v = (v_x, v_y) \in V_2$. Какие из следующих функций являются 1-формами?

(a) $\omega(P,v) = x + y$;

(b) $\omega(P,v) = v_x$;

(c) $\omega(P,v) = v_x + v_y + 1$;

(d) $\omega(P,v) = xyv_x$;

(e) $\omega(P,v) = x^2 v_x + y^2 v_y$;

(f) $\omega(P,v) = xv_xv_y$.