

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)
Семинар 4. Замены переменных и фазовое пространство (8.02.2018)

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Замечание 1. *Некоторые уравнения не являются уравнениями с разделяющимися переменными, но становятся такими после того как мы сделаем некоторую замену.*

Задача 1. Подбирая подходящую замену, решить уравнение.

(a) $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$;

(b) $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$;

(c) $y' = \sin(x+y)$;

(d) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$;

(e) $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$;

(f) $xy' = x+y$.

Определение 1. *Траекторией* непрерывной вектор-функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

с указанным на ней направлением движения при возрастании t .

Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений \mathbb{R}^n .

Задача 2. Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций.

(a) $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$;

(b) $\varphi(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi)$;

(c) $\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \geq 0$;

(d) $\varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0, 1]$.

Определение 2. *Траекторией* или *фазовой кривой* автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

называется траектория решения этого уравнения. Иными словами, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

В дальнейшем в этом листке при рассмотрении произвольных уравнений мы будем требовать, чтобы для них выполнялось условие теоремы существования и единственности решения (например, для (1) достаточно потребовать $f \in C^1$).

Задача 3. Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$ (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);

(a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$;

(b) $\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 1$;

(c) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y$;

(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$;

(e) $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y$;

(f) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$;

(g) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$;

Задача 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

- (a) Нарисовать векторное поле.
- (b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
- (c) Угадать, как будут выглядеть настоящие фазовые кривые и доказать, что действительно так.