

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год

Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)

Семинар 2. Изоклины. Автономные уравнения на прямой (25.02.2018)

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Замечание 1. Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением $\dot{x} = f(x, t)$. В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через x , а искомую функцию через y , и записывать уравнение в виде $y' = f(x, y)$ или $dy/dx = f(x, y)$. Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x, y) , в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Задача 1. Начертить несколько разных изоклин для следующих уравнений. Затем начертить эскизы интегральных кривых.

(a) $y' = 2x - y$.

(b) $y' = y - x^2$.

(c) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$.

(d) $yy' + x = 0$.

(e) $xy' = 2y$.

(f) $xy' + y = 0$.

(g) $y' = \frac{y}{x+y}$.

Задача 2. [1], см. также [2] и [3].

Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести?

Задача 3. [4] Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a) $y' = x^2$.

(b) $y' = e^x$.

(c) $y' = e^y$.

(d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$

(e) $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$.

(f) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(g) $\dot{x} = x^2 + 1$.

(h) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$.

(i) $\dot{x} = 10^x$.

(j) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(k) $\dot{x} = \cos(x - t)$.

Задача 4. Решая уравнение $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e .

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
- [4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.