

Школа лингвистики, 2017-18 уч. год**Математические основания компьютерной лингвистики****Домашнее задание (Срок сдачи: 13 декабря 2017, 18:00)***И. В. Щуров*

Задача 1. Связный простой (неориентированный, без кратных рёбер и петель) граф без циклов называется *деревом*. Доказать, что граф является деревом тогда и только тогда, когда каждые две его вершины соединены ровно одним путём (все рёбра которого различны).

Задача 2. Каждый из 17 ученых переписывается с каждым из остальных на каком-то одном из трех языков. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающиеся друг с другом на одном языке.

Задача 3. Пусть предикат $F(x)$, определённый на множестве всех людей, проверяет, что x является женщиной, а предикат $C(x, y)$ проверяет, что y является ребёнком x . Запишите с помощью этих предикатов, кванторов и операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, следующие утверждения:

- (а) x является бабушкой y .
- (б) x и y — родные братья.
- (в) x и y — сводные сёстры (то есть имеют ровно одного общего родителя).

Задача 4. Рассмотрим предикат $D(n, m)$, проверяющий, является ли число m делителем числа n (n и m — натуральные числа, не меньшие 1). Верно ли утверждение $\forall n \exists m D(n, m)$?

Задача 5. При каких вещественных α верно утверждение

$$\sin n = O(n^\alpha), \quad n \rightarrow \infty?$$

Задача 6. (а) Найти значение выражения (упростить так, чтобы не было многоточия):

$$2 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Подсказка: записать каждое выражение в скобках в виде дроби.

- (б) Доказать, что 2^n не является $O(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача 7. Случайная величина задана распределением: $P(x = 0) = p$, $P(x = 1) = 1 - p$. Найти значение p , при котором энтропия будет максимальной.

Подсказка. Для решения задачи найдите энтропию, посчитайте её производную по p и приравняйте к нулю. Вам пригодится знание о производной логарифма: $(\log x)' = 1/x$. Известно также, что если $h(x) = f(ax + b)$, где a и b — некоторые константы, и $f'(z) = R(z)$, то $h'(x) = a \cdot R(ax + b)$ (частный случай теоремы о производной сложной функции).

Задача 8. Существует ли код, который бы исправлял две ошибки и при этом позволял в 9 битах сообщения уместить 4 бита «полезной нагрузки»?

Подсказка: сколько разных 9-битных последовательностей из 0 и 1 можно получить, изменяя в данной последовательности не больше двух бит? Сколько всего 9-битных последовательностей из 0 и 1 существует? Какое максимальное число шаров радиуса два в метрике Хэмминга можно разместить в пространстве всех 9-битных последовательностей? Сколько различных сообщений можно закодировать 4 битами «полезной нагрузки»?

Задача 9. При каких значениях m и n функция x^m есть $o(x^n)$ при

- (a) $x \rightarrow \infty$;
- (b) $x \rightarrow 0$?

Задача 10. Построить линии уровня функции $f(x, y) = x^2y^2$. Найти градиент этой функции.

Задача 11. Найти матрицу такой игры: Петя и Вася одновременно называют по целому числу от 1 до 4 (включительно), затем считают их произведение. Если произведение оказывается чётным, то Вася отдаёт Пете столько рублей, чему равно это произведение, а если нечётное, то наоборот, Петя отдаёт Васе число рублей, равное произведению. Найти доминирующие стратегии игроков в этой игре, если они есть. Найти равновесие Нэша.