

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)**Семинар 15. Линейные системы и нелинейные уравнения (19.05.2017)***И. В. Щуров, Н. А. Солодовников*

Задача 1. Пусть $A = J_\lambda$ — жорданова клетка с собственным значением λ . Записать в явном виде решение уравнения $\dot{z} = Az$.

Задача 2. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^6$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найти вещественное решение этой системы с произвольным вещественным начальным условием $z(0) = z^0$.
 (b) Найти все начальные условия, при которых $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Замечание 1. *Фазовые портреты нелинейных уравнений вблизи особой точки похожи на фазовые портреты линеаризации уравнения в особой точке если линеаризованная особая точка имеет тип «седло», «невырожденный узел» или «фокус».*

Задача 3. [1] Исследовать особые точки следующих систем. Найти линеаризацию системы в каждой особой точке, определить тип особой точки. Нарисовать примерно вид фазовых портретов вблизи каждой особой точки.

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$
 (b) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$
 (c) $\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$
 (d) (*) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.