

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)
Семинар 9 (25.03.2016)

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Задача 1. Для уравнения $(\dot{x}, \dot{y}) = w(x, y)$ найти замену координат (u, v) , приводящую его к виду

$$\dot{u} = 1, \quad \dot{v} = 0$$

вблизи данной точки P :

(a) $w = (1, 2), P = (0, 0);$

(c) $w = (2x, -y), P = (-2, 0);$

(b) $w = (x, 2y), P = (0, 1);$

Задача 2. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам. Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

(a) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x;$

(e) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y;$

(b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x;$

(c) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y;$

(f) (*) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

(d) $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y;$

Задача 3. Для следующих систем найти какой-нибудь глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл, либо доказать, что его не существует.

(a) $\dot{x} = \sin(x + y), \quad \dot{y} = \cos(x + y + z), \quad \dot{z} = 0;$

(b) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \sin(x^2 + y^2 + z^2);$

(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = -3z.$

(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = 3z.$

Задача 4. Найти все периодические решения системы уравнений.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -z.$$