

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)  
**Семинар 8 (17.03.2017)**

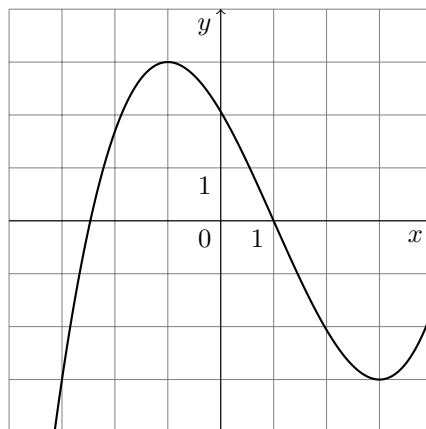
*И. В. Щуров, Н. А. Солодовников*

**Задача 1.** Для каких значений параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$  система уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = \alpha y \tag{1}$$

имеет глобальный непрерывный первый интеграл?

**Задача 2.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Построить на одном и том же рисунке эскизы графиков следующих функций. (Обратите особое внимание на поведение производной вблизи границ области определения. Используйте теорему о производной сложной функции.)



- |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (a) $\sqrt{f(x)}$ ;     | (c) $\sqrt{f(x) - 3}$ ; | (e) $\sqrt{f(x) + 1}$ ; | (g) $\sqrt{f(x) + 3}$ ; |
| (b) $\sqrt{f(x) - 2}$ ; | (d) $\sqrt{f(x) - 4}$ ; | (f) $\sqrt{f(x) + 2}$ ; | (h) $\sqrt{f(x) + 4}$ . |

**Задача 3.** Рассмотрим уравнение  $\ddot{x} = f'(x)$ , где  $f(x)$  — функция из предыдущей задачи.

- Найти потенциальную энергию. Как выглядит график потенциальной энергии?
- Записать функцию полной энергии.
- Построить несколько линий уровня функции полной энергии.
- Построить фазовый портрет. Отметить все положения равновесия. Указать, какие из них являются устойчивыми, а какие неустойчивыми.

**Задача 4.** Построить фазовые портреты для следующих уравнений:

- |                            |                             |                                  |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| (a) $\ddot{x} = x^2 - 1$ ; | (c) $\ddot{x} = 4x^3 - 4x$  | (e) $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x$  |
| (b) $\ddot{x} = 1 - x^2$ ; | (d) $\ddot{x} = -4x^3 + 4x$ | (f) $\ddot{x} = -x^3 + x^2 + 2x$ |