Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s16/f)
Семинар 6. Уравнения в полных дифференциалах (3.03.2017)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Дифференциальные 1-формы как они есть

Задачи этого раздела пересекаются с домашней работой. Они не будут включены в самостоятельную в следующий раз.

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция $\omega\colon U \times V_n \to \mathbb{R}$ от двух аргументов: точки P из области U в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и вектора v из n-мерного линейного пространства V_n. Функция ω должна быть линейной по второму аргументу.

Другой способ думать о дифференциальной 1-форме: это *ковекторное поле*, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $P \in U \subset \mathbb{R}^n$ некоторый линейный функционал на векторном пространстве V_n.

Задача 1. Пусть $P = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ и $v = (v_x, v_y) \in V_2$. Какие из следующих функций являются 1-формами?

(a) $\omega(P, v) = x + y$;
(b) $\omega(P, v) = v_x$;
(c) $\omega(P, v) = v_x + v_y + 1$;
(d) $\omega(P, v) = xyv_x$;
(e) $\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$;
(f) $\omega(P, v) = xv_x v_y$.

Замечание 1. *Множество ковекторов образует линейное пространство. В качестве его базиса можно выбрать «координатные функционалы». Например, для вектора $v = (v_x, v_y) \in V_2$ можно определить функционалы $dx(v) = v_x$ и $dy(v) = v_y$. Они являются базисом в пространстве линейных функционалов на двумерном векторном пространстве.*

Теперь 1-форму

$$\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$$

можно записать в виде

$$\omega(x, y) = x^2 dx + y^2 dy$$

Задача 2. Описать множество векторов, на которых ковектор $A \cdot dx + B \cdot dy$ принимает нулевое значение. (Здесь A и B —- некоторые константы.)

Замечание 2. *Как следует из задачи 2, любой невырожденный линейный функционал задаёт прямую, состоящую из векторов, на которых он принимает нулевое значение. Если задана 1-форма (ковекторное поле), можно для каждой точки U построить прямую, заданную этой формой в этой точке. Получится поле прямых для 1-формы.*

Замечание 3. *С дифференциальным уравнением вида $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ можно связать дифференциальную форму*

$$\omega = f(x, y)dx - g(x, y)dy,$$

где $dx(v) = v_x$, $dy(v) = v_y$ — соответствующие базисные функционалы.

Задача 3. Найти форму, соответствующую уравнению, и построить её поле направлений. Сравнить с полем направлений для исходного уравнения.

(a) $y' = y$;
(b) $y' = y/x$;
(c) $y' = -y/x$;
(d) $y' = -x/y$.

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Её *дифференциалом* называется дифференциальная 1-форма $df(x, v)$, для которой справедливо следующее:

$$f(x+v) = f(x) + df(x,v) + o(|v|).$$

Теорема 4. *Если дифференциал существует, то он записывается в виде*

$$df(x,v) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1(v) + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n(v),$$

где dx_k — координатный функционал, то есть функционал, принимающий на векторе $v = (v_1, \ldots, v_n)$ значение $dx_k(v) = v_k$.

Обычно зависимость от v не указывают и пишут просто:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n$$

Задача 5. Для следующих функций $f(x,y)$

- найти дифференциал df;
- построить линии уровня $f(x,y) = \mathrm{const}$;
- построить поле направлений, заданное уравнением $df = 0$.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; (b) $f(x,y) = xy$; (c) $f(x,y) = x - y^2$; (d) $f(x,y) = e^{x^2+4y^2}$.

Задача 6. (*) Доказать, что поле направлений, заданное уравнением $df = 0$, в каждой точке касается линий уровня функции f.

Определение 3. Уравнение

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x,y)$, что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом $dH(x,y)$, то есть $F(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$ и $G(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$.

Замечание 4. *Интегральными кривыми уравнения* (1) *являются линии уровня функции H.*

Теорема 7. *Уравнение* (1) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.*

Задача 8. Доказать

(a) необходимость в теореме 7.
(b) (*) достаточность в теореме 7.

Замечание 5. *Если выполняется условие теоремы 7, функцию H можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию F по x, полагая y фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от y, и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение $\frac{\partial H}{\partial y} = G$.*

Задача 9. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;
(b) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;
(c) $\dot{x} = \frac{t(9tx^2-2)}{x(4x^2-6t^3)}$;
(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.