

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)  
**Семинар 5. Ещё о многомерных уравнениях (17.02.2016)**  
*И. В. Щуров, Н. А. Солодовников*

**Теорема 1.** *Рассмотрим автономную систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

*и неавтономное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

*Для любой точки  $(x_0, y_0)$ , такой, что  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , фазовые кривые автономной системы совпадают с интегральными кривыми соответствующего неавтономного уравнения.*

**Задача 2.** (\*) Доказать теорему 1 с помощью теорем о производной обратной и сложной функции.

**Задача 3.** Для следующих систем уравнений:

- записать соответствующее неавтономное уравнение, решить его, построить поле направлений и интегральные кривые;
- убедиться в том, что теорема 1 работает.

(a)  $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$       (b)  $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$       (c)  $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y;$       (d)  $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$

**Задача 4.** Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a)  $\ddot{x} = 1;$       (b)  $\ddot{x} = x;$       (c)  $\ddot{x} = \dot{x};$       (d) (\*)  $\ddot{x} = \dot{x} + x.$

**Задача 5.** Рассмотрим модель Лотки–Вольтерра, описывающую динамику популяции хищников ( $y$ ) и их жертв ( $x$ ):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a, b, k, l$  — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть  $x \geq 0, y \geq 0$ .

- (a) Найти все особые точки векторного поля, соответствующего уравнению (1).
- (b) Нарисовать векторное поле (1).
- (c) Нарисовать эскиз фазовых кривых. Проинтерпретировать их вид в терминах исходной модели.
- (d) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
- (e) Решить полученное уравнение.
- (f) Нарисовать фазовые кривые системы (1).
- (g) Проинтерпретировать полученные результаты в терминах исходной модели.