

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)
Семинар 5. Ещё о многомерных уравнениях (17.02.2016)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Теорема 1. *Рассмотрим автономную систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

и неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Для любой точки (x_0, y_0) , такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, фазовые кривые автономной системы совпадают с интегральными кривыми соответствующего неавтономного уравнения.

Задача 2. (*) Доказать теорему 1 с помощью теорем о производной обратной и сложной функции.

Задача 3. Для следующих систем уравнений:

- записать соответствующее неавтономное уравнение, решить его, построить поле направлений и интегральные кривые;
- убедиться в том, что теорема 1 работает.

(a) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$ (b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$ (c) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y;$ (d) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$

Задача 4. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1;$ (b) $\ddot{x} = x;$ (c) $\ddot{x} = \dot{x};$ (d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x.$

Задача 5. Рассмотрим модель Лотки–Вольтерра, описывающую динамику популяции хищников (y) и их жертв (x):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть $x \geq 0, y \geq 0$.

- (a) Найти все особые точки векторного поля, соответствующего уравнению (1).
- (b) Нарисовать векторное поле (1).
- (c) Нарисовать эскиз фазовых кривых. Проинтерпретировать их вид в терминах исходной модели.
- (d) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
- (e) Решить полученное уравнение.
- (f) Нарисовать фазовые кривые системы (1).
- (g) Проинтерпретировать полученные результаты в терминах исходной модели.