

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s16/f>)  
**Семинар 4. Замены переменных и фазовое пространство (10.02.2016)**

*И. В. Щуров, Н. А. Солодовников*

**Замечание 1.** *Некоторые уравнения не являются уравнениями с разделяющимися переменными, но становятся такими после того как мы сделаем некоторую замену.*

**Задача 1.** Подбирая подходящую замену, решить уравнение.

$$(a) \quad y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)};$$

$$(b) \quad y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10};$$

$$(c) \quad y' = \sin(x+y);$$

$$(d) \quad y' = \sqrt{4x+2y-1};$$

$$(e) \quad (x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1;$$

$$(f) \quad xy' = x+y.$$

**Определение 1.** *Траекторией* непрерывной вектор-функции  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

с указанным на ней направлением движения при возрастании  $t$ .

Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача 2.** Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций.

$$(a) \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi);$$

$$(b) \quad \varphi(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi);$$

$$(c) \quad \varphi(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \geq 0;$$

$$(d) \quad \varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0, 1].$$

**Определение 2.** *Траекторией* или *фазовой кривой* автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

называется траектория решения этого уравнения. Иными словами, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

В дальнейшем в этом листке при рассмотрении произвольных уравнений мы будем требовать, чтобы для них выполнялось условие теоремы существования и единственности решения (например, для (1) достаточно потребовать  $f \in C^1$ ).

**Задача 3.** Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость  $(x(t), y(t))$  (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);

$$(a) \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0;$$

$$(b) \quad \dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 1;$$

$$(c) \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y;$$

$$(d) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$$

$$(e) \quad \dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y;$$

$$(f) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$$

$$(g) \quad \dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y;$$

**Задача 4.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

- (a) Нарисовать векторное поле.
- (b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
- (c) Угадать, как будут выглядеть настоящие фазовые кривые и доказать, что действительно так.