Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2016/17 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s16/f)
Семинар 1. Основные понятия (20.01.2017)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Задача 1. Для каждого уравнения ё построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Найти или угадать решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

(a) $\dot{x} = 0$; (b) $\dot{x} = -1$; (c) $\dot{x} = 2t$; (d) $\dot{x} = \frac{x}{t}$ (e) (*) $\dot{x} = \frac{2x}{t}$

Задача 2. [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) равна x и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

(a) От каких параметров зависит модель?
(b) Рассматривая прирост популяции за некоторый интервал времени и устремляя этот интервал к нулю, вывести дифференциальное уравнение, решением которого является функция $x(t)$ — зависимость размера популяции от времени.
(c) Нарисовать поле направлений для найденного дифференциального уравнения.
(d) Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
(e) Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
(f) Угадать решение: найти зависимость $x(t)$ явно и проверить, что она удовлетворяет уравнению.
(g) Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0. Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Задача 3. [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 2, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Решить для такой модели все пункты задачи 2, кроме 2f и 2g. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 4. [3, 4] Согласно модели Солоу, скорость роста капиталовооруженности экономики k удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k, \tag{1}$$

где $k = k(t)$ — капиталовооружённость в момент времени t, $f(k)$ — функция производства.

Полагая $f(k) = \sqrt{k}$, решить для получившегося уравнения все пункты задачи 2, кроме 2f и 2g.

Список литературы

[1] Malthus *An Essay on the Principle of Population.* London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
[3] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.
[4] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика.* Рукопись.