

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s15/1a>)
Семинар 13. Структурная устойчивость (20.05.2016)

И. В. Щуров

Задача 1. Пусть $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторый линейный оператор. Рассмотрим его малое возмущение $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$, где B — произвольный оператор, ε — малое вещественное число. Докажите, что

- (а) Если собственные числа A вещественны и различны, то и собственные числа A_ε вещественны и различны.
- (б) Если собственные числа A комплексно сопряжены и различны, то и собственные числа A_ε комплексно сопряжены и различны.
- (в) Если все собственные числа A не лежат на мнимой прямой (то есть имеют ненулевую вещественную часть), то и собственные числа A_ε не лежат на мнимой прямой, причём знаки их вещественных частей совпадают со знаками вещественных частей собственных значений A .

Задача 2. Рассмотрим семейство уравнений на плоскости

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2, \quad \dot{y} = -y.$$

Построить фазовые портреты при $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$. Что происходит при прохождении параметром ε значения 0?

Задача 3. [1] Исследовать особые точки следующих систем. Нарисовать примерно вид фазовых портретов вблизи особых точек.

- (а)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$$
- (б)
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$$
- (в)
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.