**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**
**Дифференциальные уравнения** (http://math-info.hse.ru/s15/1a)
**Семинар 11. Линейные системы (29.04.2016)**
*И. В. Щуров*

**Задача 1.** Решите следующие уравнения:

(a) $y = x(y' - x\cos x)$;
(b) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;
(c) $2x(x^2+y)dx = dy$;
(d) $(x+y^2)dy = ydx$;
(e) $(2e^y - x)y' = 1$;
(f) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

**Задача 2.** Для следующих систем, найти решение задачи Коши $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, построить фазовый портрет и определить тип особой точки $(0,0)$.

(a) $\begin{cases} \dot x = -4x - 3y \\ \dot y = 6x + 5y \end{cases}$
(b) $\begin{cases} \dot x = 7x - 21y \\ \dot y = 2x - 6y \end{cases}$
(c) $\begin{cases} \dot x = 7x - 9y \\ \dot y = 6x - 8y \end{cases}$
(d) $\begin{cases} \dot x = -4x - 3y \\ \dot y = 2x + y \end{cases}$

**Задача 3.** Рассмотрим систему
$$\dot x = 2x + y, \quad \dot y = 2y.$$

(a) Решить уравнение на $y$.
(b) Подставить полученное решение в уравнение на $x$. Решить получающееся уравнение на $x$.
(c) Записать решение задачи Коши с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ в виде
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$
где $M(t)$ — некоторая матрица.

**Задача 4.** Найти решение системы с начальным условием $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$.
$\dot x = x - 3y, \quad \dot y = 3x + y.$

**Задача 5.** Найти все вещественные решения следующих систем. Определить тип особой точки.
(a) $\dot x = -x - 2y, \quad \dot y = 4x + 3y$;
(b) $\dot x = -x - 5y, \quad \dot y = x + y$;
(c) $\dot x = 8x + 25y, \quad \dot y = -2x - 6y$;
(d) $\dot x = 5x + 4y, \quad \dot y = -10x - 7y$.

**Указание.** Найти какой-нибудь собственный вектор $v$ матрицы системы. Он окажется комплексным, сопряженный к нему вектор также будет собственным (с сопряженным собственным значением). Пусть соответствующее собственное значение равно $\lambda = \alpha + i\omega$. Тогда у уравнения есть решения $ve^{\lambda t}$ и $\bar v e^{\bar\lambda t}$, а также, по линейности, все их линейные комбинации. Чтобы найти вещественные решения, достаточно взять вещественную и мнимую части $ve^{\lambda t}$ (почему они будут решениями?) и все их линейные комбинации.

**Задача 6.** При каком значении параметра $\alpha$ система имеет особую точку типа «центр»? Нарисовать фазовый портрет системы при этом значении $\alpha$.
$$\dot x = \alpha x + 2y, \quad \dot y = -5x - 3y$$