

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s15/1a>)
Семинар 7. Первые интегралы (4.03.2016)

И. В. Щуров

Задача 1. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

- (a) $(2, 3)$; (b) (x, y) ; (c) (y, x) ; (d) $(1, -e^y)$;

Задача 2. [2]

Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

Задача 3. Частично основано на [2].

Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \quad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$
- (b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \quad F(x, y) = x + \arctg \frac{x}{y}.$
- (c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1+y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1+y^2}, \end{cases} \quad F(x, y) = xy - \sqrt{1+y^2}$
- (d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \quad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.