Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s15/1a)
Семинар 6. Уравнения в полных дифференциалах (26.02.2016)
И. В. Щуров

Тайное знание о дифференциалах функций

Определение 1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Её *дифференциалом* называется дифференциальная 1-форма $df(x, v)$, для которой справедливо следующее:

$$f(x+v) = f(x) + df(x, v) + o(|v|).$$

Теорема 1. *Если дифференциал существует, то он записывается в виде*

$$df(x, v) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1(v) + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n(v),$$

где dx_k — координатный функционал, то есть функционал, принимающий на векторе $v = (v_1, \ldots, v_n)$ значение $dx_k(v) = v_k$.

Обычно зависимость от v не указывают и пишут просто:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n$$

Задача 2. Для следующих функций $f(x, y)$
- найти дифференциал df;
- построить линии уровня $f(x, y) = \text{const}$;
- построить поле направлений, заданное уравнением $df = 0$.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;
(b) $f(x, y) = xy$;
(c) $f(x, y) = x - y^2$;
(d) $f(x, y) = e^{x^2+4y^2}$.

Задача 3. (*) Доказать, что поле направлений, заданное уравнением $df = 0$, в каждой точке касается линий уровня функции f.

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 2. Уравнение

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x, y)$, что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом $dH(x, y)$, то есть $F(x, y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$ и $G(x, y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$.

Замечание 1. *Интегральными кривыми уравнения* (1) *являются линии уровня функции H.*

Теорема 4. *Уравнение* (1) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.*

Задача 5. Доказать
(a) необходимость в теореме 4.
(b) (*) достаточность в теореме 4.

Замечание 2. *Если выполняется условие теоремы 4, функцию H можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию F по x, полагая y фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от y, и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение $\frac{\partial H}{\partial y} = G$.*

Задача 6. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;

(b) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;

(c) $\dot{x} = \frac{t(9tx^2-2)}{x(4x^2-6t^3)}$;

(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

Линейные уравнения первого порядка

Определение 3. Уравнение вида

$$y' = a(x)y \tag{2}$$

называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{3}$$

называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 3. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 7. (*) Решить уравнение (2) в общем виде.

Замечание 4. *Уравнение* (3) *превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*

$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

Задача 8. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;

(b) $xy' - 2y = 2x^4$;

(c) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$;

(d) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$;

(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;

(f) $y' = \frac{y}{3x-y^2}$.