Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s15/1a)
Семинар 5. Уравнения второго порядка и 1-формы (19.02.2016)
И. В. Щуров

Задача 1. (Осталось с прошлого раза.) Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$;
- нарисовать фазовые кривые по найденным уравнениям (для этого, возможно, понадобится выразить y через x или x через y);
- записать соответствующее неавтономное уравнение, решить его, построить поле направлений и интегральные кривые.

(a) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$; (b) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$; (c) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$.

Задача 2. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1$; (b) $\ddot{x} = x$; (c) $\ddot{x} = \dot{x}$; (d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x$.

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция $\omega\colon U \times V_n \to \mathbb{R}$ от двух аргументов: точки P из области U в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и вектора v из n-мерного линейного пространства V_n. Функция ω должна быть линейной по второму аргументу.

Другой способ думать о дифференциальной 1-форме: это *ковекторное поле*, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $P \in U \subset \mathbb{R}^n$ некоторый линейный функционал на векторном пространстве V_n.

Задача 3. Пусть $P = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ и $v = (v_x, v_y) \in V_2$. Какие из следующих функций являются 1-формами?

(a) $\omega(P, v) = x + y$; (c) $\omega(P, v) = v_x + v_y + 1$; (e) $\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$;
(b) $\omega(P, v) = v_x$; (d) $\omega(P, v) = xyv_x$; (f) $\omega(P, v) = xv_xv_y$.

Замечание 1. *Множество ковекторов образует линейное пространство. В качестве его базиса можно выбрать «координатные функционалы». Например, для вектора $v = (v_x, v_y) \in V_2$ можно определить функционалы $dx(v) = v_x$ и $dy(v) = v_y$. Они являются базисом в пространстве линейных функционалов на двумерном векторном пространстве.*

Теперь 1-форму

$$\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$$

можно записать в виде

$$\omega(x, y) = x^2 dx + y^2 dy$$

Задача 4. Описать множество векторов, на которых ковектор $A \cdot dx + B \cdot dy$ принимает нулевое значение. (Здесь A и B —- некоторые константы.)

Замечание 2. *Как следует из задачи 4, любой невырожденный линейный функционал задаёт прямую, состоящую из векторов, на которых он принимает нулевое значение. Если задана 1-форма (ковекторное поле), можно для каждой точки U построить прямую, заданную этой формой в этой точке. Получится поле прямых для 1-формы.*

Замечание 3. *С дифференциальным уравнением вида*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

можно связать дифференциальную форму

$$\omega = f(x, y)dx - g(x, y)dy,$$

где $dx(v) = v_x$, $dy(v) = v_y$ *— соответствующие базисные функционалы.*

Задача 5. Найти форму, соответствующую уравнению, и построить её поле направлений. Сравнить с полем направлений для исходного уравнения.

(a) $y' = y$; (b) $y' = y/x$; (c) $y' = -y/x$; (d) $y' = -x/y$.