

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s15/1a>)  
**Семинар 2. Изоклины. Автономные уравнения на прямой (29.01.2016)**  
 И. В. Щуров

**Замечание 1.** Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением  $\dot{x} = f(x, t)$ . В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через  $x$ , а искомую функцию через  $y$ , и записывать уравнение в виде  $y' = f(x, y)$  или  $dy/dx = f(x, y)$ . Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

**Определение 1.** Геометрическое место точек плоскости  $(x, y)$ , в которых наклон касательных к решениям уравнения  $y' = f(x, y)$  один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид  $f(x, y) = k$ , где  $k$  — постоянная.

**Задача 1.** Начертить несколько разных изоклин для следующих уравнений. Затем начертить эскизы интегральных кривых.

- |                                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------------|
| (a) $y' = 2x - y$ .                  | (d) $yy' + x = 0$ .        |
| (b) $y' = y - x^2$ .                 | (e) $xy' = 2y$ .           |
| (c) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$ . | (f) $xy' + y = 0$ .        |
|                                      | (g) $y' = \frac{y}{x+y}$ . |

**Задача 2.** [1], см. также [2] и [3].

Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести?

**Задача 3.** [4] Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y' = x^2$ .   | (g) $\dot{x} = x^2 + 1$ .   |
| (b) $y' = e^x$ .   | (h) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$ .  |
| (c) $y' = e^y$ .   | (i) $\dot{x} = 10^x$ .  |
| (d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$  | (j) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$ . Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |
| (e) $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$ .   | (k) $\dot{x} = \cos(x - t)$ .   |
| (f) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$ ). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |   |

**Задача 4.** Решая уравнение  $y' = y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа  $e$ .

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
- [4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.