

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s15/1a>)  
**Семинар 1. Основные понятия (22.01.2016)**

*И. В. Щуров*

**Задача 1.** Для каждого уравнения построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Найти или угадать решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

(a)  $\dot{x} = -2$ ;                      (b)  $\dot{x} = 2t$ ;                      (c)  $\dot{x} = \frac{x}{t}$                       (d) (\*)  $\dot{x} = \frac{2x}{t}$

**Задача 2.** [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) равна  $x$  и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

- От каких параметров зависит модель?
- Рассматривая прирост популяции за некоторый интервал времени и устремляя этот интервал к нулю, вывести дифференциальное уравнение, решением которого является функция  $x(t)$  — зависимость размера популяции от времени.
- Нарисовать поле направлений для найденного дифференциального уравнения.
- Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
- Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
- Угадать решение: найти зависимость  $x(t)$  явно и проверить, что она удовлетворяет уравнению.
- Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  размер популяции равен  $x_0$ . Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

**Задача 3.** [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 2, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от  $x$  как линейная функция:  $a - bx$ . (С ростом  $x$  всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Решить для такой модели задачу 2. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

**Задача 4.** [3, 4] Согласно модели Солоу, скорость роста капиталовооружённости экономики  $k$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k, \quad (1)$$

где  $k = k(t)$  — капиталовооружённость в момент времени  $t$ ,  $f(k)$  — функция производства.

Полагая  $f(k) = \sqrt{k}$ , решить для получившегося уравнения все пункты задачи 2, кроме 2f и 2g.

## Список литературы

- [1] Malthus *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
- [3] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.
- [4] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика*. Рукопись.