Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Динамические системы (http://math-info.hse.ru/s15/f)
Число вращения (27 ноября 2015)
И. В. Щуров

Определение 1. Рассмотрим окружность единичной длины $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и непрерывное сохраняющее ориентацию взаимно однозначное отображение $f\colon S^1 \to S^1$. *Непрерывным поднятием* (или просто *поднятием*) f на прямую называется такое отображение $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f \circ \pi(x) = \pi \circ \widetilde{f}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, где $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ — естественная проекция прямой на окружность, то есть отображение, переводящее точку с координатой x на прямой в точку с координатой $x \pmod 1$ на окружности. (Можно параметризовать окружность числами из полуинтервала $[0,1)$ и думать про $\pi(x)$ как про дробную часть числа x.)

Задача 1. Доказать, что $\widetilde{f}(x+1) = \widetilde{f}(x) + 1$.

Определение 2. *Числом сдвига* отображения прямой F, обладающего свойством $F(x+1) = F(x) + 1$, называется следующий предел:

$$\widetilde{\rho}(F) := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n}. \qquad (1)$$

Определение 3. *Числом вращения* непрерывного взаимно однозначного отображения окружности в себя, сохраняющего ориентацию, называется число сдвига его поднятия.

Задача 2. Найти число вращения чистого поворота, то есть отображения $f(x) = x + \alpha \pmod 1$.

Задача 3. Поднятие $\widetilde{f}$ определено неоднозначно: для любого целого k две функции $\widetilde{f}(x)$ и $\widetilde{f}(x) + k$ являются поднятиями одной и той же функции на окружности. Как поменяется число вращения, если мы прибавим к поднятию $\widetilde{f}$ целую константу?

Задача 4. Доказать, что если предел (1) существует, то он не зависит от x_0. (Подсказка: отрезок длины не больше 1 переводится отображением $\widetilde{f}$ в отрезок длины не больше 1.)

Задача 5. Доказать, что всегда существует *верхний* предел в (1). (Достаточно доказать, что выражение под знаком предела ограничено.)

Задача 6. Доказать, что если у отображения f есть периодическая точка, то число вращения рационально.

Задача 7. Доказать, что если у отображения f число вращения равно 0, то оно имеет неподвижную точку.

Указание. Рассмотреть *угловую функцию* $a(x) = \widetilde{f}(x) - x$. Тогда

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{a(x) + a(f(x)) + a(f^2(x)) + \ldots + a(f^{n-1}(x))}{n} \tag{2}$$

Рассуждая от противного, предположить, что отображение f не имеет особых точек. Рассмотреть $\min_{x\in S^1} |a(x)|$ в этом предположении и оценить правую часть (2).

Задача 8. Доказать, что если число вращения рационально, то у отображения есть периодическая точка.

Задача 9. (*) Доказать, что число вращения всегда существует.

Задача 10. (*) Рассмотрим f, g — некоторые отображения окружности, $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ — соответственно, их поднятия на прямую. Пусть $\widetilde{f}(x) \geq \widetilde{g}(x)$ для всех $x \in [0, 1)$. Доказать, что в этом случае $\rho(f) \geq \rho(g)$.

Задача 11. (*) Пусть f — некоторое отображение окружности и $f_\alpha(x) = f(x) + \alpha \pmod 1$. Доказать, что функция $\varphi(\alpha) = \rho(f_\alpha)$ монотонно неубывает по α.

Задача 12. (*) Доказать, что функция $\varphi(\alpha)$ из задачи 11 непрерывна по α.

Задача 13. Можно ли в задаче 11 заменить неубывание возрастанием?