

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. годДинамические системы (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Бифуркации (23 октября 2015)**

И. В. Щуров

Задача 1. Пусть $I = [0, 5]$ и у непрерывной функции $f: I \rightarrow I$ имеется периодическая орбита периода 4: $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$.

- Привести пример такой функции (например, построить её график).
- Предложить марковское разбиение (набор отрезков, пересекающихся не более чем по одной точке, каждый из которых накрывает один или несколько других отрезков из этого набора) и построить соответствующий граф Маркова.
- Доказать, что у этого отображения существует периодическая орбита периода 2.
- Можно ли доказать, что у этого отображения не существует периодических орбит других периодов?

Задача 2. (С прошлого семинара.) Напомним, что если f имеет цикл длины 3, то существуют такие отрезки D_1 и D_2 , имеющие одну общую точку, что их граф Маркова содержит стрелки $D_1 \rightarrow D_1$, $D_1 \rightarrow D_2$, $D_2 \rightarrow D_1$. Пусть $X = D_1 \cup D_2$. Пусть также ограничение отображения на каждый из отрезков D_1 , D_2 является взаимнооднозначным отображением.

Рассмотрим динамическую систему (X, f) . Введём символическую динамику в соответствии с разбиением на D_1 и D_2 (Уберём точку пересечения из D_1 для определённости.) Описать множество последовательностей, которые могут реализоваться как судьбы каких-либо точек.

Задача 3. Рассмотрим семейства динамических систем с параметром ε . На плоскости (ε, x) вблизи начала координат построить множества неподвижных и периодических орбит. Отметить, какие из них являются притягивающими, а какие отталкивающими. Описать бифуркацию, происходящую при $\varepsilon = 0$.

- $f(x; \varepsilon) = x + x^2 + \varepsilon + \varepsilon x$;
- $f(x; \varepsilon) = x + x^2 + \varepsilon x$;
- $f(x; \varepsilon) = x + x^3 + \varepsilon$;
- $f(x; \varepsilon) = x + x^3 + \varepsilon x$;
- $f(x; \varepsilon) = -x + x^2 + \varepsilon x$ (подсказка: рассмотреть отображение f^2);
- $f(x; \varepsilon) = -x + x^3 + \varepsilon x$.