

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**Динамические системы (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Марковские разбиения (16 октября 2015)**

И. В. Щуров

*Листок основан на листке «Порядок Шарковского» (Клименко А.В. и др.)*

Пусть  $f$  — непрерывная функция на отрезке  $I$ , отображающая его в себя. Через  $D, D_1, D_2, \dots$  будем обозначать отрезки, лежащие в  $I$ .

**Задача 1.** Докажите следующие утверждения:

- (а) Если  $D$  — отрезок, то  $f(D)$  — тоже отрезок.
- (б) Если  $D \subset f(D)$ , то существует точка  $x \in D$ , такая, что  $f(x) = x$ .
- (в) Если  $D_1 \subset f(D)$ , то существует отрезок  $\tilde{D} \subset D$ , такой что  $f(\tilde{D}) = D_1$ .

**Определение 1.** Пусть  $D_1, \dots, D_n$  — набор отрезков. Его *графом Маркова* называется ориентированный граф<sup>1</sup>, вершины которого — это  $D_1, \dots, D_n$ , а ребро  $D_i \rightarrow D_j$  проведено, если  $f(D_i) \supset D_j$  ( $D_i$  *накрывает*  $D_j$ ).

**Задача 2.** Пусть граф Маркова содержит стрелки  $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_n \rightarrow D_1$ . Докажите, что существуют:

- (а) отрезки  $D'_1 \subset D_1, \dots, D'_n \subset D_n$ , такие что  $f(D'_1) = D'_2, f(D'_2) = D'_3, \dots, f(D'_{n-1}) = D'_n, f(D'_n) = D_1$ ;
- (б) точки  $x_j \in D_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) такие, что  $f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{n-1}) = x_n, f(x_n) = x_1$ .

**Задача 3.** Докажите, что если  $f$  имеет цикл длины 3, то существуют такие отрезки  $D_1$  и  $D_2$ , имеющие одну общую точку, что их граф Маркова содержит стрелки  $D_1 \rightarrow D_1, D_1 \rightarrow D_2, D_2 \rightarrow D_1$ .

**Задача 4.** Если функция имеет цикл длины 3, то она имеет цикл любой другой длины.

**Задача 5.** Пусть  $X = D_1 \cup D_2$ , где  $D_1$  и  $D_2$  такие же, как в задаче 3. Рассмотрим динамическую систему  $(X, f)$ . Введём символическую динамику в соответствии с разбиением на  $D_1$  и  $D_2$  (Уберём точку пересечения из  $D_1$  для определённости.) Описать множество последовательностей, которые могут реализоваться как судьбы каких-либо точек.

---

<sup>1</sup> *Ориентированный граф* — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — конечное множество, а  $E \subset V \times V$  — множество рёбер. Ребро  $(v_1, v_2)$  обозначают  $v_1 \rightarrow v_2$ . Рёбра вида  $v \rightarrow v$  называются *петлями*.