

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. годДинамические системы (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Марковские разбиения (16 октября 2015)**

И. В. Щуров

Листок основан на листке «Порядок Шарковского» (Клименко А.В. и др.)

Пусть f — непрерывная функция на отрезке I , отображающая его в себя. Через D, D_1, D_2, \dots будем обозначать отрезки, лежащие в I .

Задача 1. Докажите следующие утверждения:

- (a) Если D — отрезок, то $f(D)$ — тоже отрезок.
- (b) Если $D \subset f(D)$, то существует точка $x \in D$, такая, что $f(x) = x$.
- (c) Если $D_1 \subset f(D)$, то существует отрезок $\tilde{D} \subset D$, такой что $f(\tilde{D}) = D_1$.

Определение 1. Пусть D_1, \dots, D_n — набор отрезков. Его *графом Маркова* называется ориентированный граф¹, вершины которого — это D_1, \dots, D_n , а ребро $D_i \rightarrow D_j$ проведено, если $f(D_i) \supset D_j$ (D_i *накрывает* D_j).

Задача 2. Пусть граф Маркова содержит стрелки $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_n \rightarrow D_1$. Докажите, что существуют:

- (a) отрезки $D'_1 \subset D_1, \dots, D'_n \subset D_n$, такие что $f(D'_1) = D'_2, f(D'_2) = D'_3, \dots, f(D'_{n-1}) = D'_n, f(D'_n) = D_1$;
- (b) точки $x_j \in D_j$ ($j = 1, \dots, n$) такие, что $f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{n-1}) = x_n, f(x_n) = x_1$.

Задача 3. Докажите, что если f имеет цикл длины 3, то существуют такие отрезки D_1 и D_2 , имеющие одну общую точку, что их граф Маркова содержит стрелки $D_1 \rightarrow D_1, D_1 \rightarrow D_2, D_2 \rightarrow D_1$.

Задача 4. Если функция имеет цикл длины 3, то она имеет цикл любой другой длины.

Задача 5. Пусть $X = D_1 \cup D_2$, где D_1 и D_2 такие же, как в задаче 3. Рассмотрим динамическую систему (X, f) . Введём символическую динамику в соответствии с разбиением на D_1 и D_2 (Уберём точку пересечения из D_1 для определённости.) Описать множество последовательностей, которые могут реализоваться как судьбы каких-либо точек.

¹ *Ориентированный граф* — это пара (V, E) , где V — конечное множество, а $E \subset V \times V$ — множество рёбер. Ребро (v_1, v_2) обозначают $v_1 \rightarrow v_2$. Рёбра вида $v \rightarrow v$ называются *петлями*.