Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Динамические системы (http://math-info.hse.ru/s15/f)
Структурная устойчивость (2 октября 2015)
И. В. Щуров

Определение 1. Рассмотрим отображения $f: X \to X$ и $g: Y \to Y$. Пусть существует отображение $h: X \to Y$, такое, что $g \circ h = h \circ f$. В этом случае говорят, что отображение f *полусопряжено* отображению g.

Задача 1. Если отображение f полусопряжено отображению g, значит ли это, что отображение g полусопряжено отображению f?

Задача 2. Доказать, что
(a) преобразование пекаря полусопряжено удвоению окружности, причём полусопрягающее отображение непрерывно;
(b) (*) отображение тент полусопряжено удвоению окружности, причём полуспорягающее отображение непрерывно;

Определение 2. Биективное отображение F называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно вместе с обратным.

Определение 3. Биективне отображение F называется *диффеоморфизмом гладкости* k (или C^k-*диффеоморфизмом*), если F и F^{-1} имеют производные до порядка k включительно и эти производные непрерывны.

Определение 4. Пусть в определении полуспоряженности h биекция. Тогда говорят, что f и g *сопряжены*. Если дополнительно h гомеоморфизм, то говорят, что f и g *топологически эквивалентны* или *топологически сопряжены*. Если дополнительно h диффеоморфизм (заданного порядка гладкости), то говорят, что f и g *гладко эквивалентны* или *гладко сопряжены* (с заданным порядком гладкости).

Задача 3. Пусть f и g — гладкие отображения отрезка в себя и они гладко сопряжены диффоеоморфизмом h. Пусть f имеет неподвижную точку x_0, причём известно $f'(x_0)$. Найти $g'(h(x_0))$.

Определение 5. В пространстве C^k-гладких функций на компакте X можно определить C^k-*метрику*:

$$\operatorname{dist}_{C^k}(f,g) = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in X} \|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\|,$$

где $F^{(k)}$ — это k-я производная F, $F^{(0)} = F$. Введённая таким образом C^k-метрика задаёт C^k-топологию на пространстве функций: в ней две функции являются близкими, если они близки вместе со всеми производными до порядка k включительно.

Пример 1. Для функций класса C^1 на отрезке $[0,1]$ соответствующая метрика принимает вид:

$$\operatorname{dist}_{C^1}(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)| + \max_{x\in X} |f'(x) - g'(x)|.$$

Задача 4. Пусть $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $g(x) = 0$, в качестве области определения рассматривается любой фиксированный отрезок.

(a) Найти $\mathrm{dist}_{C^0}(f_n, g)$ и $\mathrm{dist}_{C^1}(f_n, g)$.
(b) Что вы можете сказать о $\lim_{n\to\infty} f_n$ в метриках C^0 и C^1? Существует ли предел? Чему равен?

Определение 6. Система (X, f), где $f \in C^1(X)$, называется *структурно устойчивой*, если она топологически эквивалентна любому своему малому C^1-возмущению. Иными словами, найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $g \in C^1(X)$, такого, что $\mathrm{dist}_{C^1}(f, g) < \varepsilon$, f топологически сопряжено g.

Задача 5. Определим «структурную суперустойчивость», заменим в определении структурной устойчивости требование топологической сопряженности на требование гладкой сопряжённости. Является ли структурно суперустойчивым отображение $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = x/2$?

Подсказка: см. задачу 3.

Задача 6. Являются ли структурно устойчивыми следующие отображения (для отображений отрезка в себя рассматривать возмущение в классе отображений с неподвижными концами отрезка):

(a) $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x$?
(b) $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \frac{x+x^2}{2}$?
(c) $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$?
(d) $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = x + \frac{x}{100}(x-1)(x+1)$?
(e) $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = x + \frac{x^2}{100}(x-1)(x+1)$?
(f) $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = x + \frac{x^3}{1000}(x-1)(x+1)$?
(g) $f\colon S^1 \to S^1$, $f(x) = x + \alpha \pmod 1$?
(h) $f\colon S^1 \to S^1$, $f(x) = x + \frac{1}{10}\sin(2\pi x)$?
(i) $f\colon S^1 \to S^1$, $f(x) = x + \frac{1}{100}\sin^2(2\pi x)$?