Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Динамические системы (http://math-info.hse.ru/s15/f)
Пространства последовательностей (25 сентября 2015)
И. В. Щуров

Задача 1. Пусть f — преобразование пекаря, точка p имеет судьбу $\ldots\omega_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2\ldots$, точка q имеет судьбу $\ldots\omega'_{-1}\omega'_0\omega'_1\omega'_2\ldots$. Известно, что $\omega_0 \neq \omega'_0$. Доказать, что в этом случае хотя бы одно из двух неравенств выполняется: $\operatorname{dist}(p,q) \geq 1/8$ или $\operatorname{dist}(f(p), f(q)) \geq 1/8$.

Задача 2. (Осталось с прошлого раза.) Опишите неподвижные и периодические точки отображения подковы. Найдите неподвижные точки явно.

Задача 3. (Осталось с прошлого раза.) Найдите всюду плотную (в $P = K^2$) орбиту отображения подковы. Будет ли она всюду плотной в $[0,1]^2$?

Задача 4. Рассмотрим две метрики на пространстве $\Sigma_2^+ = \{\omega_0\omega_1\ldots\}$ односторонних последовательностей из нулей и единиц:

$$d_1(\omega,\omega') = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k - \omega'_k}{3^n}\right|$$

и

$$d_2(\omega,\omega') = 3^{-\min\{k\in\mathbb{Z}^+ \mid \omega_k \neq \omega'_k\}}.$$

Доказать, что эти метрики *эквивалентны*, то есть найдутся такие константы $c, C > 0$, что

$$cd_2(\omega,\omega') < d_1(\omega,\omega') < Cd_2(\omega,\omega')$$

Задача 5. Рассмотрим множество $\Sigma_{2,0}^+ \subset \Sigma_2^+$, состоящее из всех последовательностей, не имеющих бесконечного хвоста из единиц. Является ли множество $\Sigma_{2,0}^+$ замкнутым в топологии, задаваемой метриками d_1 или d_2?

Задача 6. Рассмотрим отображение $\mathcal{D}\colon \Sigma_{2,0}^+ \to [0,1)$, переводящее каждую последовательность из нулей и единиц в число с соответствующей двоичной записью. Иными словами,

$$\mathcal{D}(\omega_0\omega_1\ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^{k+1}}$$

Является ли это отображение а) взаимно однозначным; б) непрерывным (относительно топологии на $\Sigma_{2,0}^+$, заданной метриками d_1 или d_2, и стандартной метрики на $[0,1)$); в) гомеоморфизмом?

Задача 7. Рассмотрим отображение $\mathcal{J}\colon \Sigma_2 \to K \subset [0,1]$, ставящее в соответствие каждой последовательности из нулей и единиц точку канторова множества (как обсуждалось на лекции).

Является ли это отображение а) взаимно однозначным; б) непрерывным (относительно топологии на Σ_2^+, заданной метриками d_1 или d_2, и стандартной метрики на $[0,1]$); в) гомеоморфизмом?

Определение 1. Рассмотрим отображения $f\colon X \to X$ и $g\colon Y \to Y$. Пусть существует гомеоморфизм $h\colon X \to Y$, такой, что $g \circ h = h \circ f$. В этом случае отображения f и g (или динамические системы (X, f) и (Y, g)) называются *топологически сопряжёнными.*

Задача 8. Пусть f и g топологически сопряжены и у f имеется а) периодическая орбита; б) плотная орбита; в) гомоклиническая орбита. Доказать, что в этом случае у отображения g имеются орбиты с теми же свойствами.

Задача 9. (Осталось с прошлого раза.) Опишите точки, которые стремятся к неподвижным точкам как в будущем, так и в прошлом. Такие точки называют *гомоклиническими.*

Задача 10. (*) (Источник: ММО, 1993.) Для любой пары действительных чисел α и β рассмотрим последовательность

$$\omega_n = [2\{\alpha n + \beta\}].$$

Любая подпоследовательность этой последовательности называется k-словом. Верно ли, что любая конечная последовательность нулей и единиц может быть получена как k-слово для некоторых α и β при а) $k = 4$; b) $k = 5$?

Задача 11. (*) Найти количество конечных слов из 0 и 1 длины k, в которых нет двух подряд идущих единиц.