

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. годДинамические системы (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Эргодичность (11 декабря 2015)**

И. В. Щуров

Определение 1. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow X$ сохраняет меру μ , если $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ для любого измеримого множества A . Синоним: мера μ является инвариантной для отображения f .

Мы будем рассматривать системы с вероятностной мерой, то есть такой, что $\mu(X) = 1$.

Определение 2. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow X$ является эргодическим относительно инвариантной меры μ , если любое измеримое множество Y , инвариантное относительно f (то есть такое, что $f^{-1}(Y) = Y$), имеет нулевую или полную меру μ (то есть либо $\mu(Y) = 0$ либо $\mu(Y) = \mu(X) = 1$).

Задача 1. Привести пример двух каких-нибудь различных мер, сохраняемых

- (а) удвоением окружности;
- (б) преобразованием пекаря;
- (в) поворотом окружности на рациональный угол;
- (г) северо-южным отображением окружности (то есть отображением с одной отталкивающей и одной притягивающей неподвижными точками).

Задача 2. Является ли отображение поворота окружности на рациональный угол эргодичным относительно стандартной меры Лебега?

Определение 3. Для отображения $f: X \rightarrow X$ и функции $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ определено временное среднее:

$$\varphi_{t.a.}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x)$$

Задача 3. Пусть f — северо-южное отображение окружности, φ — какая-то непрерывная функция. Чему равно её временное среднее?

Задача 4. Правда ли, что для эргодического отображения для любой точки x и любой непрерывной функции f временное среднее совпадает с пространственным?

Задача 5. (*) Пусть f — C^2 -гладкий диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения. Найти его инвариантную меру. Является ли отображение эргодичным относительно этой меры?