

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**Динамические системы** (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Midterm' (4 декабря 2015)***И. В. Щуров*

Задача 1. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \alpha x$ является гомеоморфизмом?

Задача 2. Рассмотрим кусочно-линейное отображение подковы f , переводящее прямоугольник $[0, 1/3] \times [0, 1]$ в прямоугольник $[0, 1] \times [0, 1/3]$, а прямоугольник $[2/3, 1] \times [0, 1]$ в прямоугольник $[0, 1] \times [2/3, 1]$ (на каждом прямоугольнике отображение является сжатием-растяжением вдоль осей и, при необходимости, сдвигом — поворотов нет). Пусть омега-предельное множество $\omega_f(p)$ точки p (то есть множество предельных точек последовательности $\{f^n(p)\}_{n=1}^{+\infty}$) содержит в себе точку $(0, 0)$ и какую-то другую точку (z, z) , $z \neq 0$. Верно ли, что в этом случае для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ найдется такое $n \geq n_0$, что $f^n(p) \in [0, 1/3] \times [2/3, 1]$? Если да, доказать, если нет, привести контрпример.

Задача 3. Доказать, что если отображение отрезка в себя имеет периодическую точку периода 4, то оно обязательно имеет периодическую точку периода 2. (Рассмотреть все возможные неэквивалентные случаи взаимного расположения точек орбиты периода 4.)

Задача 4. Рассмотрим отображение полуинтервала $[0, 1)$ в себя, действующее следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2) \\ x - 1/2, & x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

Сколько периодических точек (любых периодов) имеет это отображение?

Задача 5. При каких значениях параметра $\alpha \in [0, 1]$ отображение окружности $f: S^1 \rightarrow S^1$, $f(x) = (2x + \alpha) \pmod{1}$ задаёт структурно устойчивую динамическую систему? Ответ обосновать.

Задача 6. Рассмотрим семейство динамических систем с параметром ε :

$$f(x; \varepsilon) = x - x^2 + \varepsilon x + \varepsilon x^3$$

На плоскости (ε, x) вблизи начала координат построить множества неподвижных и периодических орбит. Отметить, какие из них являются притягивающими, а какие отталкивающими (изобразить отталкивающие пунктирными линиями). Описать бифуркацию, происходящую при $\varepsilon = 0$ (что происходит с системой когда ε проходит значение 0).