

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**Динамические системы** (<http://math-info.hse.ru/s15/f>)**Домашнее задание №3 (6 февраля 2020 г.)***И. В. Щуров*

Правила

1. В некоторых задачах требуется проводить численные эксперименты, строить графики и т.д. Вы можете использовать для этого любого компьютерные средства, которые вам известны. Большинство «компьютерных» задач могут быть решены, например, в системах электронных таблиц типа Microsoft Excel, OpenOffice Calc, Google Spreadsheets или Numbers, однако приятнее их решать путём написания коротких программ на любом языке программирования. Мы рекомендуем свободный для использования Python, но MATLAB или Mathematica сработают не хуже. Если возникнут какие-то трудности, не стесняйтесь обращаться.
2. Решение сдаётся в виде аккуратно набранного текста со всеми необходимыми пояснениями, графиками и т.д. в формате PDF. За особо аккуратное оформление (когда работа выглядит как глава из книжки) полагается бонус в 5% от общего числа баллов. Все компьютерные вычисления сопровождаются соответствующими исходными файлами, текстами программ и т.д.
3. Каждая задача «весит» определённое количество баллов (соответствующих идеальному решению). Работа считается выполненной полностью (оценка 10), если вы набрали 30 баллов. Получить оценку больше, чем 10, невозможно. Таким образом, решать все задачи нет необходимости, и у вас есть возможность выбрать, что вам больше нравится: делать больше компьютерных экспериментов, доказывать больше теорем или красиво оформлять результаты.
4. Обсуждать способы решения не запрещено, но попытка сдать списанный текст или какие-либо чужие материалы (исходные коды и т.д.) приведёт к непоправимым последствиям (оценка 0 за работу, предупреждение-выговор-исключение от учебной части, коллапс пространственно-временно континуума и всякое такое). Не рекомендую пробовать.

Желаем удачи!

Задачи

В первых трёх задачах требуется приводить аккуратные рассуждения. Графики, в том числе построенные на компьютере, приветствуются, но не являются заменой для доказательств.

Задача 1. (15 баллов.)Рассмотрим функцию $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ на отрезке $[0, 1]$.

- (a) (3 балла) Доказать, что любая периодическая орбита отображения f_3 периода больше 1 содержит по крайней мере одну точку из отрезка $I_1 = [1/2, 3/4]$.
- (b) (7 баллов) Доказать, что отображение f_3^2 является сжимающим на I_1 . Это можно сделать, изучив поведение первой и второй производной f_3^2 на этом отрезке.
- (c) (3 балла) Доказать, что у отображения f_3 нет периодических орбит на $[0, 1]$, кроме неподвижных точек.
- (d) (2 балла) Определить тип потери устойчивости для неподвижной точки отображения f_λ при прохождении параметром λ критического значения $\lambda = 3$.

Задача 2. (10 баллов) Пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ — гомеоморфизм окружности, *меняющий ориентацию* (то есть его поднятие монотонно убывает). Доказать, что

- (a) (5 баллов) его поднятие обладает свойством $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) - 1$;
- (b) (5 баллов) отображение f имеет ровно две неподвижные точки.

Задача 3. (15 баллов.) Рассмотрим отображение иррационального поворота окружности $f(x) = x + \alpha \pmod{1}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим функцию $\phi(x) = e^{2\pi i k x}$, $k \in \mathbb{Z}$. Это 1-периодическая комплекснозначная функция, корректно определенная на окружности.

- (a) (7 баллов.) Найти временное среднее функции ϕ относительно отображения f для всех целых k . Отдельно исследовать случай $k = 0$. (Подсказка: использовать формулу для суммы членов геометрической прогрессии.)
- (b) (4 балла.) Найти временное среднее функций $\sin(2\pi k x)$ и $\cos(2\pi k x)$ относительно того же отображения для всех целых k . (Подсказка: использовать формулу Муавра и результат предыдущего пункта.)
- (c) (4 балла.) Найти пространственное среднее для функций $\sin(2\pi k x)$ и $\cos(2\pi k x)$ для целых k .

Замечание 1. Эта задача, вместе с утверждением о том, что любая непрерывная функция приближается линейной комбинацией тригонометрических функций, доказывает эргодичность иррационального поворота окружности.

Задача 4. (10 баллов.) С помощью любого языка программирования построить следующую картинку. По горизонтальной оси — параметр λ . По вертикальной — фазовая координата x . Для каждого значения $\lambda \in [2, 4]$ (взять достаточно густую сетку, например, увеличивать λ с шагом 10^{-4}) вычислить орбиту x_1, x_2, \dots, x_n , $n = 1, \dots, 1000$ случайно выбранной точки x_0 фазового пространства $[0, 1]$ под действием отображения $f_\lambda = \lambda x(1-x)$. Отметить на картинке точки (λ, x_k) , $k = 500, \dots, 1000$.

Задача 5. (10 баллов.) Рассмотрим отображение $f_a(x) = x + \frac{1}{10} \sin(2\pi x) + a \pmod{1}$. С помощью любого языка программирования построить график зависимости $\rho(a) = \rho(f_a)$, где $\rho(f_a)$ — число вращения отображения f_a , параметр a меняется в пределах от $-1/2$ до 1. Чтобы разглядеть ступеньку вблизи $a = 1/3$, построить также график для $a \in [1/3 - 1/10, 1/3 + 1/10]$. Для вычисления числа вращения вам потребуется взять очень большую итерацию отображения \tilde{f}_a .