Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Динамические системы (http://math-info.hse.ru/s15/f)
Домашнее задание №2 (6 февраля 2020 г.)
И. В. Щуров

Правила

1. В некоторых задачах требуется проводить численные эксперименты, строить графики и т.д. Вы можете использовать для этого любого компьютерные средства, которые вам известны. Большинство «компьютерных» задач могут быть решены, например, в системах электронных таблиц типа Microsoft Excel, OpenOffice Calc, Google Spreadsheets или Numbers, однако приятнее их решать путём написания коротких программ на любом языке программирования. Мы рекомендуем свободный для использования Python, но MATLAB или Mathematica сработают не хуже. Если возникнут какие-то трудности, не стесняйтесь обращаться.
2. Решение сдаётся в виде аккуратно набранного текста со всеми необходимыми пояснениями, графиками и т.д. в формате PDF. За особо аккуратное оформление (когда работа выглядит как глава из книжки) полагается бонус в 5% от общего числа баллов. Все компьютерные вычисления сопровождаются соответствующими исходными файлами, текстами программ и т.д.
3. Каждая задача «весит» определённое количество баллов (соответствующих идеальному решению). Работа считается выполненной полностью (оценка 10), если вы набрали 50 баллов. Получить оценку больше, чем 10, невозможно. Таким образом, решать все задачи нет необходимости, и у вас есть возможность выбрать, что вам больше нравится: делать больше компьютерных экспериментов, доказывать больше теорем или красиво оформлять результаты.
4. Обсуждать способы решения не запрещено, но попытка сдать списанный текст или какие-либо чужие материалы (исходные коды и т.д.) приведёт к непоправимым последствиям (оценка 0 за работу, предупреждение-выговор-исключение от учебной части, коллапс пространственно-временно континуума и всякое такое). Не рекомендую пробовать.

Желаем удачи!

Задачи

Задача 1. Рассмотрим отображение окружности $f\colon S^1 \to S^1$, задающееся формулой

$$f(x) = x + \sin(4\pi x)/100 + 1/2 \pmod 1.$$

(a) (3 балла) Является ли оно гомеоморфизмом? Диффеоморфизмом? Ответ обосновать.

(b) (5 балла) Найти все неподвижные и периодические точки. Какие из них являются устойчивыми, какие неустойчивыми, какие являются гиперболическими?
(c) (2 балл) Является ли оно структурно устойчивым?
(d) (5 баллов) Взять несколько случайных начальных условий (например, с помощью генератора случайных чисел) и построить график $f^n(x)$ как функции от n (отдельными точками или линиями, как красивее). Объяснить поведение орбит. К чему они стремятся при больших n?
(e) (5 баллов) Взять какое-нибудь C^1-малое возмущение функции f в классе диффеоморфизмов окружности, топологически сопряжённое f (доказывать топологическую сопряжённость не нужно) и выполнить для неё предыдущий пункт. Продемонстрировать сходство в поведении орбит для невозмущённого и возмущённого отображения.

Задача 2. Рассмотрим отображение окружности $f\colon S^1 \to S^1$, задающееся формулой

$$f(x) = x + \sin(2\pi x)/10 + 1/10 \pmod 1.$$

(a) (15 баллов) Выполнить пункты 1a-1d предыдущей задачи.
(b) (5 баллов) Написать следующую программу. Для заданного пользователем малого $\varepsilon > 0$, взять какое-нибудь ε-малое в метрике C^1 возмущение функции f в классе диффеоморфизмов окружности, топологически не сопряжённое f, и выполнить для неё пункт 1d предыдущей задачи. Продемонстрировать разницу поведения орбит у невозмущённого и возмущённого отображения.

Задача 3. Рассмотрим *обобщённое отображение пекаря* $f\colon X \to X$, где $X = [0,1] \times [0,1)$:

$$f\colon (x,y) \mapsto (x', y'),$$
$$x' = \begin{cases} \lambda_a x, & y < \alpha, \\ (1-\lambda_b) + \lambda_b x, & y \geq \alpha, \end{cases}$$
$$y' = \begin{cases} y/\alpha, & y < \alpha, \\ (y-\alpha)/\beta, & y \geq \alpha, \end{cases}$$

где $\beta = 1 - \alpha$ и $\lambda_a + \lambda_b < 1$.

(a) (2 балла) Построить на картинке $f(X)$, $f(f(X))$.
(b) (5 баллов) Доказать, что множество точек, для которых определены все итерации отображения f, имеет меру нуль (то есть может быть покрыто быть может бесконечным объединением прямоугольников сколь угодного малой суммарной площади).
(c) (3 балла) Разбив подходящим образом фазовое пространства на две части, определить отображение судьбы.
(d) (5 баллов) Описать множество последовательностей, которые реализуются как судьбы точек.

(e) (2 балла) Описать судьбы периодических точек. Доказать, что периодических точек бесконечно много.

(f) (3 балла) Описать судьбы точек, стремящихся к точке $(0,0)$ одновременно в прямом и обратном времени.

(g) (5 баллов) Для $\alpha = \sqrt{2}/2$, $\lambda_a = 1/\pi$ и $\lambda_b = 1/e$, вычислить и нарисовать первые 300 итераций каких-нибудь десяти случайных точек.

Определение 1. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon X \to X$. Говорят, что эта последовательность *сходится поточечно* к функции $f_\infty\colon X \to X$, если для всякого $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$$

Определение 2. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon X \to X$. Говорят, что эта последовательность *сходится равномерно* к функции $f_\infty\colon X \to X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}_{C^0}(f_n, f_\infty) = 0,$$

где $\operatorname{dist}_{C^0}$ определялась в семинаре 5.

Задача 4. (10 баллов) Будем рассматривать непрерывные функции, определённые на компакте. Верно ли, что из поточечной сходимости следует равномерная? Верно ли, что из равномерной сходимости следует поточечная? Если где-то ответ «да», доказать, если «нет», привести контрпример.