**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год**
**Динамические системы** (http://math-info.hse.ru/s15/f)
**Домашнее задание №1 (Срок сдачи: 24 сентября 2015)**
*И. В. Щуров*

# Правила

1. В некоторых задачах требуется проводить численные эксперименты, строить графики и т.д. Вы можете использовать для этого любого компьютерные средства, которые вам известны. Большинство «компьютерных» задач могут быть решены, например, в системах электронных таблиц типа Microsoft Excel, OpenOffice Calc, Google Spreadsheets или Numbers, однако приятнее их решать путём написания коротких программ на любом языке программирования. Мы рекомендуем свободный для использования Python, но MATLAB или Mathematica сработают не хуже. Если возникнут какие-то трудности, не стесняйтесь обращаться.
2. Решение сдаётся в виде аккуратно набранного текста со всеми необходимыми пояснениями, графиками и т.д. в формате PDF. За особо аккуратное оформление (когда работа выглядит как глава из книжки) полагается бонус в 5% от общего числа баллов. Все компьютерные вычисления сопровождаются соответствующими исходными файлами, текстами программ и т.д.
3. Каждая задача «весит» определённое количество баллов (соответствующих идеальному решению). Работа считается выполненной полностью (оценка 10), если вы набрали 50 баллов. Получить оценку больше, чем 10, невозможно. Таким образом, решать все задачи нет необходимости, и у вас есть возможность выбрать, что вам больше нравится: делать больше компьютерных экспериментов, доказывать больше теорем или красиво оформлять результаты.
4. Обсуждать способы решения не запрещено, но попытка сдать списанный текст или какие-либо чужие материалы (исходные коды и т.д.) приведёт к непоправимым последствиям (оценка 0 за работу, предупреждение-выговор-исключение от учебной части, коллапс пространственно-временно континуума и всякое такое). Не рекомендую пробовать.

Желаем удачи!

# Задачи

**Задача 1.** (5 баллов) С помощью любого компьютерного инструмента найти явно первые 150 итераций точки a) $x_0 = \sqrt{2} - 1$; b) $x_0 = 1/3$ под действием отображения удвоения $f = T_2$. Построить график $f^k(x_0)$ как функции $k$. Объяснить, почему он так выглядит.

**Определение 1.** *Частотой попадания* орбиты точки $x_0$ в множество $A \subset X$ под действием отображения $f\colon X \to X$ называется предел (если он существует)

$$\overline{\chi}_A(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid f^k(x_0) \in A\}|}{n},$$

где в числителе дроби стоит число элементов соответствующего множества.

**Задача 2.** (10 баллов) С помощью любого компьютерного инструмента найти (с точностью хотя бы до трёх знаков после запятой) частоту попадания точки 0 в какую-нибудь фиксированную дугу под действием поворота окружности на какой-нибудь иррациональный угол. Исследовав разные комбинации, сформулировать гипотезу о том, как зависит эта частота от выбора угла и дуги.

**Задача 3.** (*) (20 баллов) Аккуратно доказать гипотезу, сформулированную в предыдущей задаче.

**Определение 2.** *Отображение «тент»* (tent map), задаётся следующим образом:

$$\mathcal{T}_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x < 1/2, \\ \lambda(1-x), & x \geq 1/2. \end{cases}$$

**Задача 4.** Рассмотрим динамическую систему с фазовым пространством $X = [0, 1]$ и отображением $\mathcal{T}_2$.

(a) (10 баллов) Разбив отрезок $[0, 1]$ на подходящие части, ввести символическую динамику для отображения $\mathcal{T}_2$:

  i. определить отображение судьбы;

  ii. доказать, что разным точкам соответствуют разные судьбы;

  iii. любая ли последовательность может быть реализована как судьба некоторой точки?

(b) (2 балла) описать судьбы неподвижных и (пред)периодических точек; доказать, что периодические точки плотны на отрезке $[0, 1]$;

(c) (2 балла) доказать, что существует точка со всюду плотной орбитой;

(d) (2 балла) построить графики функций $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2^2$, $\mathcal{T}_2^3$ (степень везде композиционная); отметить на графике периодические точки соответствующих периодов;

(e) (4 балла) описать, как отображение действует в терминах разложения числа в бесконечную двоичную дробь;

(f) (40 баллов) написать статью «отображение тент» в русской Википедии, которая была бы лучше аналогичной статьи в английской Википедии (обсудите с лектором, если решите выполнять это задание).

**Определение 3.** *Логистическое отображение* задаётся следующим образом:

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x).$$

**Задача 5.** Рассмотрим динамическую систему с фазовым пространством $X = [0,1]$ и отображением $f_4$.

(a) (10 баллов) Разбив отрезок $[0,1]$ на подходящие части, ввести символическую динамику для отображения $f_4$:

i. определить отображение судьбы;

ii. доказать, что разным точкам соответствуют разные судьбы;

iii. любая ли последовательность может быть реализована как судьба некоторой точки?

(b) (2 балла) описать судьбы неподвижных и (пред)периодических точек; доказать, что периодические точки плотны на отрезке $[0,1]$;

(c) (2 балла) доказать, что существует точка со всюду плотной орбитой;

(d) (2 балла) построить графики функций $f_4$, $f_4^2$, $f_4^3$ (степень везде композиционная); отметить на графике периодические точки соответствующих периодов.

(e) (4 балла) найти первые 25 итераций под действием функции $f_4$ для двух различных точек $x_0$ и $y_0$, отличающихся не более, чем на $10^{-5}$ (лучше иррациональных); построить на одной картинке графики $f_4^k(x_0)$ и $f_4^k(y_0)$ как функций $k$; начиная с какой итерации начинается явное расхождение графиков? Что изменится, если точку $y_0$ вдвое приблизить к $x_0$? В десять раз приблизить?

**Задача 6.** (15 баллов) Вася Петров использует калькулятор Б3-34, чтобы вычислить траекторию некоторой точки под действием отображения удвоения $T_2\colon S^1 \to S^1$, $T_2(x) = 2x \pmod 1$. После того, как Вася вычисляет на калькуляторе очередную точку орбиты, он десять секунд смотрит в окно. В это время калькулятор захватывает его младшая сестра Алёна. Она прибавляет к текущему значению, записанному на калькуляторе, случайное число (положительное или отрицательное), не превосходящее по модулю $2^{-50}$ (примерно $10^{-5}$), после чего прячется под столом. Вася, не заметив подвоха, переписывает зафиксированное на калькуляторе число (со всеми значащими цифрами) на бумажку, после чего снова применяет отображение удвоения. Таким образом получается последовательность $y_n$:

$$y_n = 2y_{n-1} + \varepsilon_n \pmod 1, \quad |\varepsilon_n| \le 2^{-50}, \quad n = 1, 2, \ldots, T,$$

где $T$ много больше 50. Такая последовательность называется *эпсилон-траекторией*. Доказать, что найдётся такая точка $x_0$, что её настоящая траектория (орбита) $\{x_n\}$ проходит вблизи эпсилон-траектории $\{y_n\}$. А именно, для всякого $n = 0, 2, \ldots, T$ справедлива оценка $|y_n - x_n| \le 2^{-49}$.

**Задача 7.** (15 баллов) Решить предыдущую задачу, не используя никаких свойств отображения $T_2$, кроме того факта, что оно растягивает как минимум вдвое отрезки длины меньше $1/4$ и его ограничение на любой такой отрезок является инъективным отображением (то есть не склеивает точки).