Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16 уч. год
Динамические системы (http://math-info.hse.ru/s15/f)
Домашнее задание №4 (дополнительное) (6 февраля 2020 г.)
И. В. Щуров

Листок основан на материалах, любезно предоставленных Алексеем Клименко.

Задач много, но это только кажется: решения большинства пунктов занимают одну-две строчки.

Задача 1. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — самый короткий из циклов нечётной длины, большей 1. Обозначим через $y_1, \dots, y_n$ упорядоченные по возрастанию точки $x_1, \dots, x_n$.

(a) Существует $i \in \{1, \dots, n-1\}$, такое что $f(y_i) > y_i$, $f(y_{i+1}) < y_{i+1}$. Таким образом, отрезок $D = [y_i, y_{i+1}]$ накрывает себя.

(b) $D \subset f(D) \subset f^2(D) \subset \dots \subset f^k(D) \subset \dots$.

(c) $f^k(D)$ $(k \leq n-2)$ содержит не меньше, чем $k+2$ точки набора $y_1, \dots, y_n$.

(d) Существует j, такое что y_j и $f(y_j)$ лежат по одну сторону от середины отрезка D.

(e) Найдётся отрезок $E = [y_k, y_{k+1}]$, не совпадающий с D, но накрывающий D.

(f) Если $E \subset f^{n-3}(D)$, то f имеет цикл нечётной длины, большей 1 и меньшей n (что противоречит условию).

(g) Отрезок $f^k(D)$ содержит (при $k \leq n-2$) ровно $k+2$ точки набора $y_1, \dots, y_n$.

(h) При фиксированном n функция f может переставлять точки $y_1, \dots, y_n$ только одним из двух возможных способов.

(i) Функция f имеет цикл любой чётной длины и любой нечётной длины, большей n.

Задача 2. (a) Пусть точка x имеет период n при действии отображения f^k. Верно ли, что она имеет период nk при действии f?

(b) Докажите, что при условии, что каждый простой делитель k делит число n, утверждение предыдущего пункта верно.

Задача 3. Пусть n — натуральное число, c — нечётное, большее 1, d — чётное. Докажите, что если f имеет точку периода $2^n c$, то f имеет точку периода $2^n d$.

Задача 4. Множество всех периодов точек под действием f будем обозначать $\operatorname{Per} f$. Пусть дана функция f с $\operatorname{Per} f = P$. Постройте функцию g, для которой $\operatorname{Per} g = 2P \cup \{1\}$.

Задача 5. Приведите пример функции:

(a) имеющей точку периода 9, но не имеющей точки периода 7;

(b) имеющей точки периодов 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, но не имеющей точек других периодов;

(c) имеющей точку периода 6, но не имеющей точек нечётных периодов, больших единицы.

Задача 6. (a) Пусть точка имеет период 27 под действием f^4. Докажите, что она имеет период 27, 54 или 108 под действием f.

(b) Если f имеет точку периода 100, то она имеет точку периода 108.

Задача 7. Пусть n — натуральное число, $c > 1$ и $d > c$ — нечётные числа. Докажите если $2^n c \in \operatorname{Per} f$, то $2^n d \in \operatorname{Per} f$.

Задача 8. Пусть f имеет цикл $(x_1, \ldots, x_n)$ чётной длины, $y_1, \ldots, y_n$ — те же точки, упорядоченные по возрастанию.

(a) Утверждения задач 1a–1c справедливы и в этом случае.

(b) Если утверждение задачи 1d не выполняется, то функция имеет цикл длины 2.

(c) Если утверждение задачи 1d выполняется, то функция имеет цикл нечётной длины, большей 1 (а значит, и цикл длины 2).

Задача 9. Докажите, что если $2^n \in \operatorname{Per} f$, где $n \geq 1$, то $2^{n-1} \in \operatorname{Per} f$.

Задача 10. Введём на множестве натуральных чисел следующий линейный порядок, называемый *порядком Шарковского*:

$$
\begin{aligned}
&1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec \\
&\prec \cdots \prec 2^3\cdot 5 \prec 2^3\cdot 3 \prec \cdots \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 3 \prec \cdots \prec 2\cdot 7 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 3 \prec \cdots \prec 7 \prec 5 \prec 3.
\end{aligned}
$$

Формально говоря, $\mathbb{N}$ разбивается на множества $E_k = \{2^k(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и множество $E_\infty = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Для $a \in E_\alpha$ и $b \in E_\beta$ $a \prec b$, если либо $\alpha > \beta$ (при этом считается, что $\infty > k$ для $k = 0, 1, \ldots$), либо если $\alpha = \beta \neq \infty$ и $a > b$, либо если $\alpha = \beta = \infty$ и $a < b$.

(a) Докажите, что для всякой функции f множество $\operatorname{Per} f$ является *начальным отрезком* в $\mathbb{N}$ с этим порядком, т. е. если $a \in \operatorname{Per} f$ и $b \prec a$, то $b \in \operatorname{Per} f$.

(b) Докажите, что для каждого непустого начального отрезка M этого множества существует функция f, для которой $\operatorname{Per} f = M$.