

## Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16

## Математический анализ 1

## Семинар 8: Производная. (22-23 октября 2015 года)

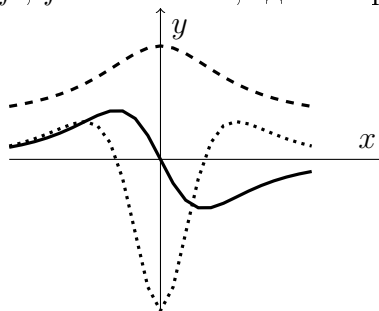
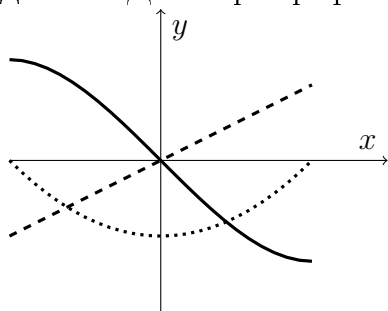
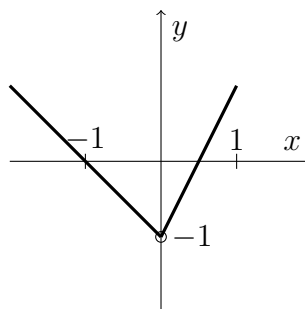
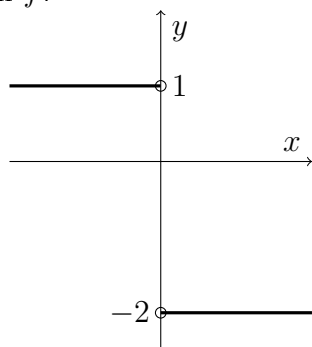
Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

**Задача 1.** Найдите и нарисуйте касательные в данных точках для данных функций.

- (a)  $f(x) = x^2$  в точке  $x = 2$ ;  
 (b)  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке  $x = 4$ ;  
 (c)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  в точке  $x = 1/2$ .  
 (d)  $f(x) = 2^x$  в точке  $x = 1$ ;  
 (e)  $f(x) = \cos 2x$  в точке  $\pi$ .

**Задача 2.** Определите промежутки убывания и возрастания, найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы для следующих функций:

- (a)  $x^3 - x^2 - x + 1$ ;  
 (b)  $\sin 2x - x$ ;  
 (c)  $\frac{x+1}{x-1} + 2x$ .

**Задача 3.** Даны три графика функций  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ . Выясните, где который график.**Задача 4.** Дан график производной  $f'$ . Постройте эскиз графика непрерывной функции  $f$ .**Задача 5.** Найдите производные вне нуля и производные в нуле для следующих функций:

- (a)  $x \sin \frac{1}{x}$ ;  
 (b)  $x^2 \sin \frac{1}{x}$

**Задача 6** (Решение дифференциальных уравнений). Подберите функцию  $f$ , для которой:

- (a)  $f'(x) = \sin x + \cos x$ ;
- (b)  $f'(x) = x^2$ ;
- (c)  $f'(x) = f(x)$ ;
- (d)  $f'(x) = 2f(x)$ ;
- (e) (\*)  $f'(x) = xf(x)$ ;
- (f)  $f''(x) = x^2$ ;
- (g)  $f''(x) = -f(x)$ ;
- (h) (\*)  $f''(x) = -f(x) + 1$ ;
- (i) (\*)  $f'(x) = -f^2(x)$ ;

**Задача 7.** (\*) Рассмотрим зеркало в форме параболы  $y = x^2$ .

Докажите, что пучок лучей, параллельных оси  $Oy$ , отразившись от зеркала, собирается в одной точке (фокусе параболы). Найдите эту точку.