

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16**Математический анализ 1****Семинар 7: Непрерывность; производная¹. (15-16 октября 2015 года)***Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова*

Задача 1. (а) Какие нужно выбрать значения параметров a и b , чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} - 1, & x < 0 \\ a \sin x + b \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ e^{\operatorname{tg} x}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(б) Какие нужно выбрать значения параметров a , b , c , чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x}, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 2. Докажите, что уравнение

- (а) $x = \cos x$;
- (б) $\ln x = 3 - 2x$;
- (с) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$

имеет решение. Сколько решений имеет каждое уравнение?

Задача 3. Докажите, что $(f + g)' = f' + g'$, пользуясь определением производной.

Задача 4. Вычислите следующие пределы:

- (а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
- (б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$;
- (с) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$;
- (д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/4 + x) - \sin \pi/4}{x}$;
- (е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e^1}{x}$;
- (ф) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$;
- (г) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;
- (х) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$;
- (и) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

¹При составлении листка использовался учебник Стюарта

Задача 5. Турист² начал восхождение на гору в 7 утра. Он заночевал на вершине горы. На следующий день в 7 утра он начал спускаться с горы, и к вечеру вернулся на базу, с которой начинал путь.

Докажите, что было такое время (например, 2 часа 58 минут 9 секунд), в которое он был на одной и той же высоте в первый и во второй день.

Задача 6. Из города М в город Д ведут две дороги. Две машины, связанные веревкой длины 9 м, смогли проехать из города в М в город Д (одна по одной дороге, другая по другой). Докажите, что если круглый воз радиусом 5 метров едет из города М в город Д по одной дороге, а другой такой же круглый воз едет из города Д в город М по другой дороге, то они столкнутся.

²В учебнике Стюарта — тибетский монах