

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16**Математический анализ 1****Семинар 6: Пределы функций; непрерывность. (8-9 октября 2015 года)***Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова*

Задача 1. Выясните, в каких точках непрерывны следующие функции; определите типы разрывов. Можно ли доопределить функцию в точках неопределенности так, чтобы она стала непрерывной на всей прямой \mathbb{R} ?

- (a) $\frac{x+2}{x^2-1}$;
- (b) $x^2 \sin \frac{1}{x}$;
- (c) $\frac{\sin \frac{1}{x}}{\ln x}$ при $x > 0$, 1 при $x < 0$;
- (d) $|x|$;
- (e) $e^{\sin 1/x}$;
- (f) $\sin[x]$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Задача 2. Какие нужно выбрать значения параметров a и b , чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 3. Найдите вертикальные и горизонтальные асимптоты, и нарисуйте эскиз графика:

- (a) $\frac{x+1}{x-1}$;
- (b) $\frac{x+1+\sin x}{x-1}$;
- (c) $\frac{x+1+2^{-x}}{x-1}$;
- (d) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+2}$;
- (e) $\frac{2e^x}{e^x-5}$;
- (f) $\frac{2e^{1/x}}{e^{1/x}-5}$;
- (g) $\sqrt{x^2+1}-x$;
- (h) $\frac{1+x^4}{x^2-x^4}$.

Задача 4. Вычислите следующие пределы:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1/2)^{1/x}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x 2^{1/x}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x + x^2}{x}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x}$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/4 + x) - \sin \pi/4}{x};$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e^1}{x};$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x};$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$

(n) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$

(o) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x};$

(p) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Задача 5. Каждой точке на окружности соответствует угол ϕ , определенный с точностью до прибавления 2π . Пусть f — отображение окружности, переводящее точку с углом $\phi \in [0, 2\pi]$ в точку с углом:

(a) $\phi + \pi/2;$

(b) $2\phi;$

(c) $\phi/2;$

(d) $\phi + 0.1 \sin \phi;$

(e) $\phi + 0.1 \sin \phi/2;$

(f) $\phi + 0.1 \sin 10\phi.$

Какие из этих отображений естественно считать непрерывными? Опишите, как они действуют на окружности.