

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16

Математический анализ 1

Семинар 5: Пределы функций. (1-2 октября 2015 года)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

Задача 1. Докажите, используя определение предела по Коши, что

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4;$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \neq 2;$

В пункте а) приведите пример δ , которое соответствует $\varepsilon = 0.41$.**Задача 2.** Докажите, используя определение предела по Гейне, что

(a) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x+1}{x-2} = +\infty;$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \neq 0.$

Задача 3. Вычислите следующие пределы.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$

(j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x};$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x + 2};$

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 3x};$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x x + x^2 \sin x}{3^x x};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 3x};$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x};$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x + x^2}{x};$

(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x};$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x;$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2^{-x}}{x^3 + 3^x};$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x};$

(p) $\lim_{x \rightarrow \infty} x 2^{1/x};$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x}{x};$

(q) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x);$

(i) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2^{x-5}}{x-5};$

(r) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}.$

Задача 4. Найдите вертикальные и горизонтальные асимптоты, и нарисуйте эскиз графика:

(a) $\frac{2x+1}{x-2};$

(b) $\frac{2x+1+\sin x}{x-2};$

(c) $\frac{2x+1+2^{-x}}{x-2};$

(d) $\frac{2e^x}{e^x-5};$

(e) $\frac{1+x^4}{x^2-x^4}.$

Задача 5. Приведите пример функции:

- (a) определенной на всей числовой оси, но не имеющей предела ни в одной точке;
- (b) не монотонной ни на каком отрезке.

Задача 6. (a) Придумайте определение **наклонной асимптоты** к графику функции (неформальное определение: наклонная асимптота — это график линейной функции $y = ax + b$, для которой расстояние до нашего графика стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$). Чему должны быть равны a и b ?

- (b) Найдите наклонные асимптоты функций $\frac{x^2}{x-1}$, $\frac{x+\sin x}{2+x}$, $\frac{x^4}{x^3-1}$. Нарисуйте эскизы их графиков.
- (c) Может ли функция пересекать свою наклонную асимптоту?
- (d) Приведите пример функции, у которой нет наклонной асимптоты.
- (e) Придумайте определение **параболической асимптоты** (неформальное определение: параболическая асимптота — это график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, для которой расстояние до нашего графика стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$). Чему должны быть равны a , b и c ?
- (f) Приведите примеры функций, у которых есть параболические асимптоты, и примеры функций, у которых их нет. Нарисуйте соответствующие графики.
- (g) Может ли функция иметь наклонную и параболическую асимптоту одновременно?