

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16**Математический анализ 1****Семинар 4: Пределы последовательностей и функций. (24-25 сентября 2015 года)***Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова***Задача 1.** Вычислите пределы:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{3^n - 2^n};$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 - 3};$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n};$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + n^3 - 2^{-n}}{2^n + 3};$

(e) $\frac{\sin(n+1) - n \cos(n+1)}{n^2};$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 5}}{n - 1};$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5}}{n - 1};$

(h) $\frac{(n+1)^{5/2} - n}{\sin n + n^3};$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/n};$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n} + 1};$

(k) (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n.$

- Задача 2.** (a) Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Что можно сказать о последовательности $1/a_n$?
- (b) Известно, что последовательность a_n неограниченна. Что можно сказать о последовательности $1/a_n$?

Говорят, что предел функции f в точке a равен A , если:

Определение по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon);$$

Определение по Гейне: для всякой последовательности $\{x_n\}, x_n \neq a$, сходящейся к a , последовательность $f(x_n)$ сходится к A .

Задача 3. Прочитайте вслух определение предела по Коши.**Задача 4.** Докажите, используя определение предела по Коши, что

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0;$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1;$

(c) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25.$

В каждом случае определите δ , которое соответствует $\varepsilon = 0.25$.

Задача 5. Докажите, используя определение предела по Гейне, что

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25;$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 1 = 0;$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2} = 4.$

Задача 6. Пользуясь определением предела по Гейне, докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$.

Задача 7. Угадайте следующие пределы:

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5};$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-5};$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-5};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x;$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x;$

(f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5};$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x;$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x.$

Задача 8. Приведите пример ограниченной функции, которая

(a) не имеет предела в нуле.

(b) имеет предел в точке 0, но он не равен $f(0)$.

Задача 9. (*) Придумайте определение частичного предела функции при $x \rightarrow 0$. Приведите пример функции, частичными пределами которой при $x \rightarrow 0$ являются

(a) все числа на отрезке $[-1, 1]$;

(b) числа 1 и -1 ;

(c) 0 и ∞ .

Задача 10. (*)

(a) Придумайте строгое определение касательной к графику функции.

(b) Найдите касательную к графику функции $y = x^2$ в точке 5^1 .

(c) Найдите касательную к графику функции $y = 1/x$ в точке 2.

В обоих случаях нарисуйте соответствующие рисунки.

¹Эта задача уже была в этом листке. Угадайте, где?