

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16

Математический анализ 1

Семинар 13: Интегралы и объемы (10-11 декабря 2015 года)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

Задача 1. Найдите следующие определенные и неопределенные интегралы:

(a) $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx;$

(g) $\int_{-1}^1 x^{100} \sin x dx;$

(b) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx;$

(h) $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx;$

(c) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$

(i) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} dx;$

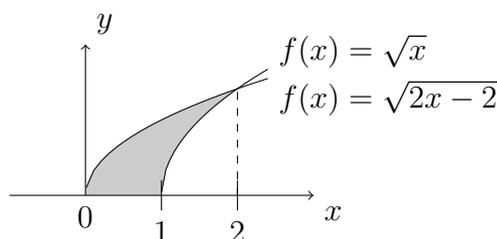
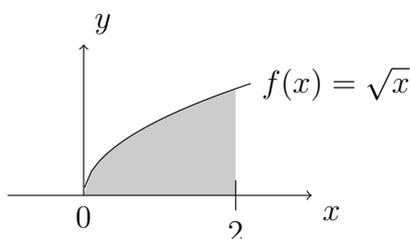
(d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} dx;$

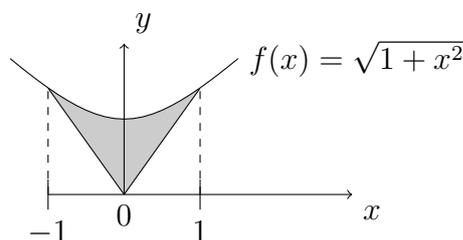
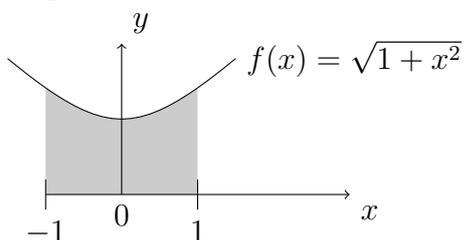
(e) $\int \cos(\sin x) \cos x dx;$

(k) $\int_0^1 \arcsin x dx.$

(f) $\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx;$

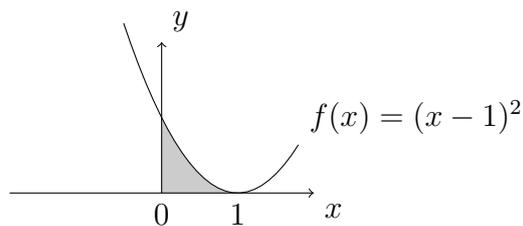
Задача 2. Найдите объём тел, полученных вращением следующих фигур вокруг оси Ox :

Параболоид.



Гиперболоид.

Задача 3. Найдите объём тела, полученного вращением следующей фигуры вокруг оси Oy :



- Задача 4.** (а) Найдите среднее значение функции x^{100} на отрезке $[0, 1]$.
(б) Найдите среднее значение функции $1 + \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.
(с) Докажите, что среднее значение скорости $v(t) = x'(t)$ на любом отрезке времени $[0, T]$ равно средней скорости движения.

Задача 5. (*)

- (а) Выясните, сходятся ли следующие несобственные интегралы: $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$, $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$.
(б) Выясните, сходятся ли следующие ряды: $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, $\sum \frac{1}{n \ln n}$, $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$.