

## Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16

## Математический анализ 1

## Семинар 13: Интегралы и объемы (10-11 декабря 2015 года)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

**Задача 1.** Найдите следующие определенные и неопределенные интегралы:

(a)  $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx;$

(g)  $\int_{-1}^1 x^{100} \sin x dx;$

(b)  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx;$

(h)  $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx;$

(c)  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$

(i)  $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} dx;$

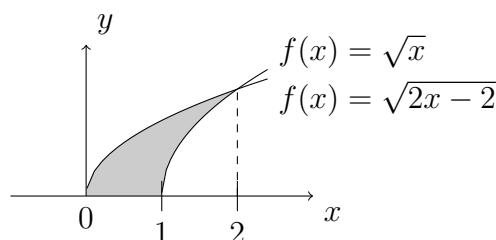
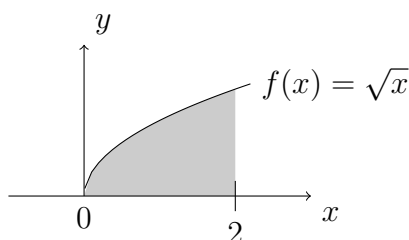
(d)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(j)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} dx;$

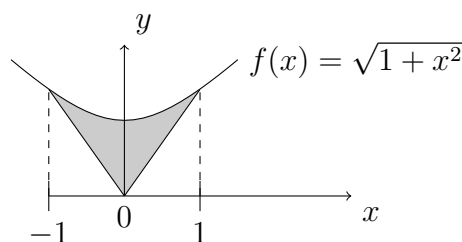
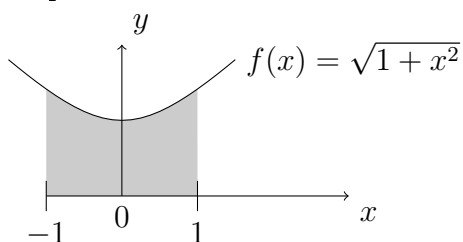
(e)  $\int \cos(\sin x) \cos x dx;$

(k)  $\int_0^1 \arcsin x dx.$

(f)  $\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx;$

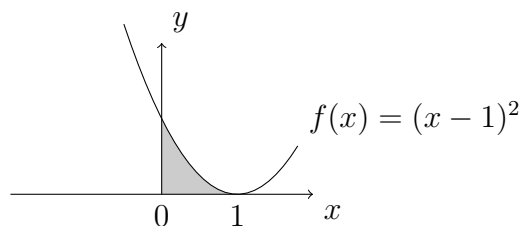
**Задача 2.** Найдите объём тел, полученных вращением следующих фигур вокруг оси  $Ox$ :

Параболоид.



Гиперболоид.

**Задача 3.** Найдите объём тела, полученного вращением следующей фигуры вокруг оси  $Oy$ :



- Задача 4.** (а) Найдите среднее значение функции  $x^{100}$  на отрезке  $[0, 1]$ .  
(б) Найдите среднее значение функции  $1 + \sin x + \cos 2x$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .  
(с) Докажите, что среднее значение скорости  $v(t) = x'(t)$  на любом отрезке времени  $[0, T]$  равно средней скорости движения.

**Задача 5.** (\*)

- (а) Выясните, сходятся ли следующие несобственные интегралы:  $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ ,  $\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$ ,  $\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$ ,  $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ .  
(б) Выясните, сходятся ли следующие ряды:  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ ,  $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ .