

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16**Математический анализ 1****Семинар 10: Производная. Ряд Тейлора (19-20 ноября 2015 года)***Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова*

Задача 1. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, точки перегиба, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте эскизы графиков.

(a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$;

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$;

(c) $f(x) = e^{x-x^2}$;

(d) $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 6x$.

Задача 2. Выпишите ряды Тейлора в нуле для следующих функций:

(a) $\ln(1+x)$;

(b) $\cos x$;

(c) $\frac{x}{1-x}$;

(d) $\operatorname{tg} x$ до 3-го члена.

Задача 3. Найдите следующие пределы.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\cos x - 1}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos x - 1}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^3}$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\sin(x^2)}$.

Задача 4. (a) Вычислите $\ln(3/2)$ с точностью до сотых (и докажите оценку на погрешность).

(b) Вычислите $e^{1/4}$ с точностью до тысячных (и докажите оценку на погрешность).

Задача 5. Убедитесь, что почленная производная ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$ в нуле есть ряд Тейлора для $\frac{1}{1+x}$.

Задача 6. Выпишите ряд Тейлора функции $\cos x$ в точке $x = -\pi/2$ до 5-го члена.

Задача 7. Выпишите первые 4 члена ряда Тейлора для функции $\frac{1}{1-x^2}$ в нуле. Как он связан с рядами Тейлора для $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{1}{1+x}$? При каких значениях x ряд сходится?

Задача 8. Выпишите первые 4 члена ряда Тейлора для функции $e^{\sin x}$ в нуле.

Задача 9. (*) Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема в нуле, и выпишите её ряд Тейлора.