Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16
Математический анализ 1
Семинар 1: Функции и графики (4-5 сентября 2015 года)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

Задача 1. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций. Отметьте на графиках нули функций. Найдите минимальное и максимальное значение функций и точки, где они достигаются.

(a) $2x - 3$.
(b) $2|x| - 3$.
(c) $|2x - 3|$.
(d) $\sqrt{1 - x^2}$.
Выпишите уравнение касательной к графику в точке $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и в точке $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
(e) $|x^2 - 5x - 3|$. В каких точках касательная прямая к графику горизонтальна?
(f) $2\sin(x/2 + \pi)$;
(g) $\arcsin(x - 2)$; где определена эта функция?
(h) $\frac{1}{x+1} - 1$, а также график обратной функции.
Выпишите формулу для обратной функции.
В каких точках касательная к графику идет под углом $45°$ к осям координат?
(i) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
и график обратной функции. Выпишите формулу для обратной функции.
(j) $x^3 - x$ и график обратной функции.
(k) $2^{x-2} - x$.

Задача 2. Решите уравнение

(a) $|x - 5| < 2$;
(b) $|x^2 - 4x + 2| < 2$;
(c) $|\sin x - 1/2| < 1/2$;
(d) $|\cos x - 1| < 1/2$;
(e) $e^{e^x} = 2$;
(f) $e^x = 2^x$;
(g) $2x + \ln x = 2$.

Задача 3. Представьте, что вы — древний грек. Что вы можете сказать о числе π? Как доказать, используя только геометрические рассуждения, что $\pi > 3$? Что $\pi < 4$? Можете ли вы доказать более точные оценки?

Задача 4 (*). Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Задача 5 (*). Используя результат предыдущей задачи, вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком параболы $y = x^2$, прямыми $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$.

Итерационные методы вычисления корней.

Задача 6 (*)**.** Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $x > 0$. Показать, что если $f(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Рассмотрим бесконечную последовательность чисел $x_0, x_1, \ldots$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{1+1}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1}}$$

Эта последовательность построена по следующему закону: $x_{n+1} = f(x_n)$, где f — функция $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ из задачи 6 (говорят, что мы рассматриваем *итерации* функции f). Оказывается, пределом этой последовательности при $n \to \infty$ является число $\sqrt{2}$. Этот факт можно использовать для приближенного нахождения $\sqrt{2}$.

Задача 7 (*)**.** Вычислите первые 5 членов последовательности x_n. Оцените, насколько близко они подошли к $\sqrt{2}$.

Задача 8 (*)**.** Как модифицировать функцию f, чтобы новая последовательность стремилась к $\sqrt{n}$ для данного числа n?

Задача 9 (*)**.** Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$. Показать, что если $g(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Задача 10 (*)**.** Пусть последовательность y_n задается следующим образом: $y_0 = 1$, $y_{n+1} = g(y_n)$. Пределом такой последовательности является $\sqrt{2}$. Вычислить первые 5 элементов этой последовательности. Как вы считаете, какая из двух последовательностей (x_n или y_n) быстрее сходится к $\sqrt{2}$?

Задача 11 (*)**.** Как модифицировать функцию g, чтобы новая последовательность стремилась к $\sqrt{n}$ для данного числа n? (Полученная таким образом формула называется *итерационной формулой Герона.*)

Задача 12 (*)**.** Доказать, что $y_n = x_{2^n}$, то есть при применении итерационной формулы Герона получаются элементы последовательности x_n с номерами, равными степеням двойки.