Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16
Математический анализ 1
Дополнительное домашнее задание «Цепные дроби[1]» (Срок сдачи: 7 ноября 2015 года)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

Задачи 6 – 12 из семинара 1 засчитываются как задачи этого листка. Добавляется также такая задача:

Задача 0. В условиях задачи 12 предыдущего листка докажите, что $\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$; $\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}$.

В задачах 2 – 7 можно воспользоваться задачей 8, а можно, наоборот, в задаче 8 пользоваться предыдущими задачами.

Определение 1. *Цепной* (или: *непрерывной*) дробью называется запись вида

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}},$$

где $\{k_i\}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел (но, возможно, $k_0 = 0$). С цепной дробью связана последовательность *подходящих дробей*:

$$\frac{p_i}{q_i} := k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots \frac{\dots}{k_{i-1} + \frac{1}{k_i}}}}$$

Определение 2. Говорят, что иррациональное число α раскладывается в цепную дробь,

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}},$$

если $\alpha = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i}$.

Задача 1. Пусть

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}.$$

(a) Как, зная α, определить k_0? Как определить k_1?
(b) Опишите алгоритм, позволяющий по α вычислить k_i.
(c) Что произойдет, если α рационально?
(d) Какие из дробей p_k/q_k приближают α снизу, а какие сверху?
(e) Пусть известно, что $\alpha = 1.812\dots$. Какие из подходящих дробей можно вычислить, зная α с такой точностью? Чему они равны?

[1]Больше о цепных дробях можно прочесть в замечательной брошюре В.И.Арнольда «Цепные дроби» (М.: изд. МЦНМО, 2001)

Определение 3. *Разложить* число α в цепную дробь — значит применить к нему алгоритм из задачи 1.

Задача 2. Пусть подходящие дроби p_i/q_i получены применением алгоритма из задачи 1 к числу α.

(a) Докажите рекуррентную формулу для p_i:

$$p_{n+1} = k_{n+1}p_n + p_{n-1},\ q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Подсказка: попробуйте вручную привести дробь $k_0 + \frac{1}{k_1+\frac{1}{k_2}}$ *к виду* $\frac{p_3}{q_3}$. *В чем отличие от* $\frac{p_2}{q_2}$*?*

(b) Докажите, что $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$.

(c) Пользуясь предыдущим пунктом, оцените $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}|$.

(d) Докажите, что $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < 1/q_n^2$.

(e) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

В следующей задаче можно пользоваться результатом предыдущей задачи.

Задача 3. (a) Число α раскладывается в цепную дробь с коэффициентами $1 = k_0 = k_1 = k_2 = \ldots$. Чему равно α?

(b) Докажите, что числа x_n из задачи 6 семинара 1 есть подходящие дроби для числа $\sqrt{2}$.

(c) Разложите в цепную дробь число $\sqrt{n}$. Установите связь с задачей 8 семинара 1.

(d) Число α раскладывается в цепную дробь с коэффициентами $1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$. Чему равно α?

(e) Какое число раскладывается в цепную дробь с коэффициентами $a, b, a, b, a, b \ldots$?

Определение 4. *Числа Фибоначчи* — это последовательность чисел

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

(каждое следующее число есть сумма двух предыдущих).

Задача 4. (a) Докажите, что для золотого сечения $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ у подходящих дробей в числителе и знаменателе стоят числа Фибоначчи F_n.

(b) Чему равен предел отношения чисел Фибоначчи $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$?

Задача 5. Для какого числа α последовательность q_n возрастает медленнее всего? Выведите отсюда явную оценку на $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$ для произвольного иррационального α.

Задача 6. Докажите, что для любой последовательности $\{k_i\}$ существует число α с такой последовательностью коэффициентов в цепной дроби.

Задача 7. Докажите, что (для $i > 0$) из дробей со знаменателем, не большим q_i, дробь $\frac{p_i}{q_i}$ лучше всех приближает число α.

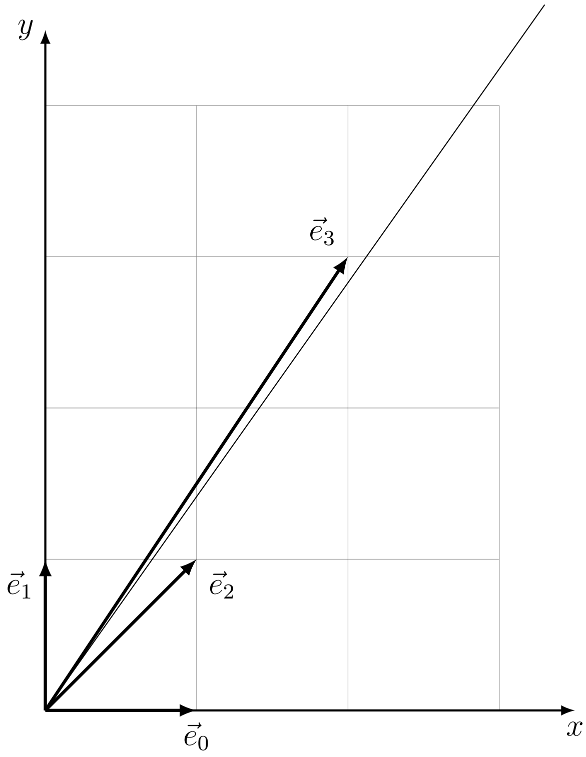

Рис. 1: Вытягивание носов, $\alpha = \sqrt{2}$

Задача 8. Переформулируйте задачи 1,2,6,7 в терминах **алгоритма вытягивания носов**, который описан ниже [2]

На клетчатой плоскости Oxy нарисуем прямую $y = \alpha x$. Возьмем два вектора: $\vec{e}_0 = (1, 0), \vec{e}_1 = (0, 1)$ (см. рис. 1).

Будем выполнять следующую последовательность действий с парой векторов $(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1})$.

① Прибавить к вектору $\vec{e}_i$ вектор $\vec{e}_{i+1}$ наибольшее возможное количество раз k_i, чтобы векторы $\vec{e}_{i+1}$ и $\vec{e}_i + k_i\vec{e}_{i+1}$ остались по разные стороны от нашей прямой. Запомнить число k_i.

② Заменить пару векторов $(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1})$ на пару векторов $(\vec{e}_i + k_i\vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+1})$.

③ Поменять векторы местами: получится пара $(\vec{e}_{i+1}, \vec{e}_{i+2})$, где $\vec{e}_{i+2} = \vec{e}_i + k_i\vec{e}_{i+1}$.

④ Вернуться к шагу ①.

Подсказка: k_i совпадает с тем k_i, которое было раньше (это надо доказать!). Координаты векторов $\vec{e}_i$ тоже встречались раньше; как они назывались?

[2] Можно сделать наоборот: перевести эти задачи на язык вытягивания носов, а уже потом доказывать их. Это может быть проще!