Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2015/16
Математический анализ 1
Монотонные и фундаментальные последовательности. Второй замечательный предел. (Срок сдачи: 30 ноября 2015 г.)

Б. С. Бычков, Н. Б. Гончарук, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова

Решения задач сначала нужно полностью записать, а затем уже сдавать устно. Удачи!

Определение 1. Последовательность (y_n) называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n), если существует такая последовательность натуральных чисел (m_k), что $m_{k+1} > m_k$ и $y_k = x_{m_k}$ для каждого k.

Определение 2. Число a называется частичным пределом последовательности, если в любой окрестности a находится бесконечное число членов последовательности.

Определение 3. Число a называется частичным пределом последовательности, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a.

Задача 1. Докажите равносильность этих двух определений.

Задача 2. Докажите, что если последовательность имеет предел a, то и любая ее подпоследовательность также имеет предел a.

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если $\exists C\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| < C$.

Задача 3. (a) Докажите, что из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

(b) Докажите, что из всякой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Задача 4. Пусть a — единственный частичный предел ограниченной последовательности (x_n). Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Определение 5. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : \forall m, n > k\ |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 5. Докажите, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Задача 6. Докажите, что если $a_n > |b_n|$ и последовательность $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ сходится, то последовательность $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ тоже сходится.

Определение 6. Последовательность (x_n) называется *монотонно возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей)*, если
$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n \leq x_{n+1}, x_n > x_{n+1}, x_n \geq x_{n+1}$). Такие последовательности называются *монотонными*.

Задача 7. Докажите, что если последовательность b_n знакопеременная и $|b_n|$ монотонно убывает, то последовательность $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ сходится.

Задача 8. Выясните, сходятся ли следующие ряды:

(a) $\sum \frac{1}{2^n}$;

(b) $\sum \frac{1}{n}$;

(c) $\sum \frac{1-2^{-n}}{2^n+n^2}$;

(d) $\sum \frac{1}{n!}$

(e) $\sum \frac{n+\sin n}{3^n-2^n}$;

(f) $\sum \frac{1}{\ln n}$;

(g) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Задача 9. Докажите, что из всякой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

Задача 10. Докажите, что монотонная последовательность не может иметь более одного частичного предела.

Задача 11. Докажите, что монотонная ограниченная последовательность сходится.

Задача 12. Докажите, что следующие последовательности сходятся, и найдите их пределы:

(a) $x_n = \frac{c^n}{n!}$;

(b) $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$;

(c) $x_n = \frac{a^n}{n^k}$ $(a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$;

(d) $x_n = \sqrt[n]{n}$;

(e) $x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, где (f_n) — последовательность чисел Фибоначчи, которая задается формулой: $f_0 = f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Задача 13. (a) Докажите, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ монотонно возрастает, а последовательность $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ монотонно убывает.

(b) Докажите, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ сходится. Ее предел обозначается латинской буквой e.

Задача 14. Докажите, что последовательность чисел $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ сходится к числу e.

Задача 15. Докажите иррациональность числа e.

Указание: Предположите противное, оцените величину $|a_n - e|$ и докажите, что она не может быть рациональной.

Задача 16. (a) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1$.

(b) Докажите, что $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Определение 7. *Верхним (нижним) пределом* последовательности (x_n) называется число M (конечное, $+\infty$ или $-\infty$), обладающее следующими двумя свойствами:

- M — частичный предел последовательности (x_n);

- Предел любой сходящейся или стремящейся к $+\infty$ или к $-\infty$ подпоследовательности (x_n) не больше (не меньше), чем M.

Обозначение: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$).

Определение 8. *Верхним (нижним) пределом* последовательности (x_n) называется предел величин $\sup_{n\geq k} x_n$ ($\inf_{n\geq k} x_n$) при $k \to \infty$.

Задача 17. Докажите равносильность двух предыдущих определений.

Задача 18. Докажите, что для всякой последовательности чисел $a_n > 0$ верно неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq e.$$