Факультет социальных наук, 2014-15 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа: продолжение (http://math-info.hse.ru/s14/9)
Ряды (29 сентября 2014)
И. В. Щуров, Р. Я. Будылин

Определение 1. Сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается через $\sum_{k=1}^{n} a_n$. Сумма бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

определяется как предел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

Теорема 1. *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$, причём*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \pm \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Теорема 2. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и c — некоторое фиксированное число, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Задача 3. Найти 5 первых частичных сумм ряда. Изобразить их на графике. Угадать, является ли ряд сходящимся. Если да, найти сумму ряда. Если нет, объяснить, почему.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$;

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Задача 4. Определить, является ли сходящимся следующий ряд. Если является, найти его сумму.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2n}\right)$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{2^n}\right)$.

Задача 5. Допустим, вы пришли в магазин, и потратили там некоторую сумму денег на покупки. Магазин какую-то часть этих денег оставил себе в качестве прибыли (сбережений), а оставшуюся часть тоже потратил — например, закупив товар у поставщика. Поставщик, в свою очередь, часть полученных денег оставил себе, а другую часть тоже куда-то потратил, и так далее. Экономисты называют это *эффектом мультипликатора*.

Допустим, в некотором гипотетическом изолированном государстве, правительство решает потратить D рублей. Предположим, что каждый экономический агент тратит $100c\%$ и сберегает $100s\%$ от полученной суммы, при этом $c + s = 1$.

(a) Пусть S_n — общий объём денег, потраченных в результате n транзакций. Найти уравнение для S_n.

(b) Показать, что $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, где $k = 1/s$. Это число называется *мультипликатором.*