Факультет социальных наук, 2014-15 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа: продолжение (http://math-info.hse.ru/s14/9)
Условная оптимизация и метод множителей Лагранжа (16 февраля 2015)
И. В. Щуров, Р. Я. Будылин

Задачи частично основаны на материалах курса Margaret McQuain, Virginia Polytechnic Institute and State University (`http://www.math.vt.edu/people/mcquain/1526_Lag_opt_2012.pdf`).

Задача 1. Джессика и Боб организовали семейный бизнес по производству плюшевых игрушек. Джессика посчитала, что если в неделю производить x котиков и y коровок, то прибыль их компании «МуНя» будет задаваться функцией

$$p(x, y) = -2x^2 + 60x - 3y^2 + 72y + 100.$$

(a) Объяснить, почему эта функция может иметь такой вид.
(b) Найти оптимальное количество котиков и коровок, максимизирующее прибыль компании «МуНя».
(c) Решив предыдущий пункт, Боб понял, что если работать в оптимальном режиме, то у него совсем не останется времени на футбол, а Джессика не сможет ходить на танцы. Прикинув свои возможности и желания, они пришли к выводу, что не смогут производить больше, чем 20 игрушек в неделю. Боб записал уравнение $x + y = 20$, выразил из него y через x, подставил в функцию p и нашёл максимум. А Джессика училась в университете и поэтому решила ту же задачу методом множителей Лагранжа. Одинаковые ли ответы у них получились?

Задача 2. Объём производства некоторой компании задаётся функцией Кобба — Дугласа

$$f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3},$$

где x — количество затраченных человекочасов, y — количество единиц капитала. Бюджетное ограничение записывается как $100x + 100y = 400000$. Максимизировать производство при заданном ограничении.

Задача 3. Олигарх Иван Петрович хочет отгородить себе прямоугольный участок максимальной площади на бесконечно длинном прямолинейном берегу большого живописного озера (таким образом грубо нарушив ч. 2 ст. 6 Водного Кодекса РФ). Для этого у него есть 100 метров колючей проволоки. Как Ивану Петровичу следует ей распорядиться, если возможная ответственность за нарушение закона его не пугает? (Огородиться следует с трёх сторон, четвертой «стеной» будет выступать сам берег озера.)

Задача 4. Найти условный максимум функции $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ при условии $x + y = 1$
(a) выразив y через x и подставив в функцию f;
(b) с помощью метода множителей Лагранжа.
Нарисовать линии уровня функции f. Объяснить, почему в точке условного максимума линия уровня не касается кривой, задаваемой условием? Почему это не противоречит методу множителей Лагранжа?

Задача 5. Найти максимум функции $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ при условнии $x^2 + y^2 = 1$. Нарисовать линии уровня функции f и кривую, заданную условием.

Задача 6. С помощью метода множителей Лагранжа найти максимальные и минимальные значения функций при данных ограничениях.
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad xy = 1;$
(b) $f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13;$
(c) $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6;$
(d) $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6.$

Задача 7. Придумать задачу на метод множителей Лагранжа и решить её.