Факультет социальных наук, 2014-15 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа: продолжение (http://math-info.hse.ru/s14/9)
Производная сложной и неявной функции (9 февраля 2015)
И. В. Щуров, Р. Я. Будылин

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Теорема 1. *Рассмотрим функцию нескольких переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и вектор-функцию $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$. Пусть F дифференцируема в точке $g(t_0)$ и g дифференцируема в t_0. Тогда производная сложной функции $H(t) = F(g(t))$ в точке $t = t_0$ может быть найдена по формуле*

$$H'(t_0) = F'_{x_1}(g(t_0)) \cdot g'_1(t_0) + F'_{x_2}(g(t_0)) \cdot g'_2(t_0) + \ldots + F'_{x_n}(g(t_0)) \cdot g'_n(t_0) \qquad (1)$$

Задача 2. Пусть $H(t) = F(g(t))$. Найти $H'(t)$ двумя способами: с помощью теоремы о прозводной сложной функции и выполнив явную подстановку. Сравнить результаты.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, $g(t) = (\sin t, e^t)$;
(b) $F(x, y) = \cos(x + 4y)$, $g(t) = (5t^4, 1/t)$;
(c) $F(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$;
(d) $F(x, y, z) = xe^{y/z}$; $g(t) = (t^2, 1 - 4, 1 + 2t)$;
(e) $F(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $g(t) = (\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t)$.

Задача 3. Задайте парамерически прямую, проходящую через точку $Q = (x_0, y_0)$ в направлении вектора $v = (v_x, v_y)$, то есть найдите такую вектор-функцию $g(t)$, чтобы её траекторией (множеством всех возможных значений, изображенным на плоскости (x, y)) была указанная прямая. Пусть вектор v имеет единичную длину. Рассмотрим произвольную дифференцируемую функцию двух переменных $F(x, y)$ и сложную функцию $H(t) = F(g(t))$. Найти производную $H'(t)$, пользуясь правилом о производной сложной функции. Сравнить результат с определением производной по направлению. Объяснить.

Задача 4. Пусть $z = f(x, y)$ и f — дифференцируемая функция, причём $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $h(3) = 7$, $g'(3) = 5$, $h'(3) = -4$, $f'_x(2, 7) = 6$, $f'_y(2, 7) = -8$. Найти dz/dt в точке $t = 3$.

Задача 5. Урожай пшеницы W зависит от средней температуры за год T и уровня осадков R. Британские учёные полагают, что средняя температура растёт со скоростью 0,15 градусов Цельсия в год, а уровень осадков уменьшается на 0,1 см в год. Они также полагают, что при текущем урожае $\partial W/\partial T = -2$ и $\partial W/\partial R = 8$.

(a) Объяснить физический смысл знаков частных производных.
(b) Найти скорость изменения урожая пшеницы в данный момент dW/dt.

Задача 6. Рассмотрим некоторую дифференцируемую функцию двух переменных $F(x, y)$. Пусть $y = f(x)$ — такая функция, что $F(x, f(x)) = 0$ при всех значениях x, при которых $f(x)$ определена (то есть $y = f(x)$ является решением уравнения $F(x, y) = 0$). Рассмотрим вектор-функцию $g(t) = (t, f(t))$ и сложную функцию $H(t) = F(g(t))$.

(a) Чему равняется $H(t)$?
(b) Доказать, что $H'(t) = 0$.
(c) Записать производную $H'(t)$ по формуле производной функции, выразив её через частные производные функции F и производную f'.
(d) Из условия $H'(t) = 0$, выразить f' через частные производные F.

Задача 7. Пользуясь результатами предыдущей задачи, найти dy/dx:

(a) $x^2 + y^2 = 1$;
(b) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$;
(c) $y^5 + x^2 y^3 = 1 + ye^{x^2}$;
(d) $\cos(x - y) = xe^y$;
(e) $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$.