Факультет социальных наук, 2014-15 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа: продолжение (http://math-info.hse.ru/s14/9)
Касательная плоскость и производная по направлению (19 января 2015)
И. В. Щуров, Р. Я. Будылин

1 Напоминание

Определение 1. Производной функции одной переменной $f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует).

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}.$$

Задача 1. Для функции $f(x)$ и заданного x_0 найти значение выражений $\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$ для $t = 1$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}01$, $t = 0{,}001$. Затем, пользуясь определением, найти $f'(x_0)$.

(a) $f(x) = 5x - 2$, $x_0 = 3$;
(b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;
(c) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$;
(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

2 Касательная плоскость и производная по направлению

Определение 2. Производной функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $Q = (x_0, y_0)$ по направлению вектора $v = (v_x, v_y)$ единичной длины (то есть $|v| = 1$) называется предел (если он существует):

$$f'_v(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Если обозначить через $Q + tv$ результат сдвига точки Q на вектор tv, то координаты $Q + v$ равны $(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$ и это определение можно переписать в виде:

$$f'_v(Q) = \lim_{t\to 0} \frac{f(Q + tv) - f(Q)}{t}.$$

Задача 2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = 5x + 3y$.
(a) Построить её линии уровня и график.
(b) Для точки $Q = (1, 2)$ найти частные производные и производные вдоль направлений (по определению):

i. $v = (1, 0)$;
ii. $v = (-1, 0)$;
iii. $v = (0, 1)$;
iv. $v = (0, -1)$;
v. $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
vi. $v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
vii. $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
viii. $v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
ix. $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
x. $v = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
xi. $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(c) Проверить, что для каждой из найденных производных по направлению выполняется равенство $f'_v(Q) = f'_x(Q)v_x + f'_y(Q)v_y$.

(d) При каком v производная по направлению максимальна?

(e) Отметить на рисунке вектор градиента $(f'_x(Q), f'_y(Q))$, приложенный к точке Q. Как соотносятся направления вектора градиента и направление линии уровня в точке Q?

(f) Найти уравнение касательной плоскости к графику f в точке Q.

Задача 3. Решить предыдущую задачу для функций

(a) $f(x, y) = x^2 - y$ (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (c) $f(x, y) = xy$