

Факультет социальных наук, 2014-15 уч. год

Доп. главы алгебры и анализа: продолжение (<http://math-info.hse.ru/s14/9>)

Несобственные интегралы (8 сентября 2014)

И. В. Щуров, Р. Я. Будылин

1 Оценки интегралов

Задача 1. Оценивая подынтегральное выражение константой, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^1 e^{t^3} dt > 1; & \text{(c)} \quad & 1 < \int_e^{e^2} \ln x dx < 14; \\ \text{(b)} \quad & \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx < 2; & \text{(d)} \quad & \int_1^3 e^x \sin x dx < 27. \end{aligned}$$

Задача 2. Сравнивая подынтегральную функцию с какой-то более простой, доказать, что

$$\text{(a)} \quad \int_1^3 e^x \sin x dx \leq e^3 - e; \quad \text{(b)} \quad \int_0^2 2^x dx < e^2 - 1; \quad \text{(c)} \quad \int_1^2 \ln x dx \leq \frac{1}{2}.$$

Задача 3. (а) Показать, что $1 \leq \sqrt{1+x^3} \leq 1+x^3$ для $x \geq 0$.

$$\text{(b)} \quad \text{Показать, что } 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq 1,25.$$

Задача 4. (а) Показать, что $\cos(x^2) \geq \cos x$ для $0 \leq x \leq 1$.

$$\text{(b)} \quad \text{Показать, что } \int_0^{\pi/6} \cos(x^2) dx \geq \frac{1}{2}.$$

Задача 5. Показать, что

$$0 \leq \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx \leq 0,1,$$

сравнивая подынтегральное выражение с какой-то более простой функцией.

2 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Задача 6. Сходится ли интеграл? Если да, найти его.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx; & \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{-x}}; & \text{(g)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \quad (\text{Hint:} \\ & & & & & \text{какие ещё методы инте-} \\ \text{(b)} \quad & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \text{(e)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; & & \text{грирования вы знаете,} \\ & & & & & \text{кроме интегрирования} \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}; & \text{(f)} \quad & \int_{-\infty}^0 x e^x dx \quad (\text{Hint: инте-} \\ & & & \text{грирование по частям!);} & \text{(h)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \end{aligned}$$

Задача 7. При каких значениях параметра α сходится интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$?