

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год

Доп. главы теории дифференциальных уравнений (<http://math-info.hse.ru/s14/u>)

Число вращения 2: и всё-таки она вертится! (20 марта 2015)

И. В. Щуров

Задача 1. Доказать, что $\rho(f) < p/q$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}^q(x) - x < p$ для всех x .

Задача 2. Доказать, что $\rho(f + \alpha)$ зависит непрерывно по α . (Подсказка: использовать предыдущую задачу.)

Задача 3. Найти число вращения отображения $f(x) = x + \sin 2\pi x + \varepsilon \pmod{1}$ для $\varepsilon = 1/2$. Что произойдёт когда ε будет близко к $1/2$?

Задача 4. Рассмотрим множество, получающееся следующим образом: из отрезка $[0, 1]$ выкинули среднюю треть (то есть интервал $(1/3, 2/3)$), осталось два отрезка. С каждым из них проделали ту же операцию: разделили на три равные части, выкинули среднюю треть (осталось 4 отрезка). И так далее. Обозначим через K_n множество, которое получается на n -м шаге. Пусть

$$K = \bigcap_{n>0} K_n.$$

Доказать, что

- (а) Множество K имеет меру нуль, то есть может быть покрыто счётным набором отрезков сколь угодно малой суммарной длины.
- (б) Множество K в точности состоит из всех точек отрезка $[0, 1]$, у которых есть запись в троичной системе счисления, не использующая цифру 1.
- (с) Существует взаимно однозначное отображение из отрезка $[0, 1]$ на K .

Задача 5. Рассмотрим функцию φ , заданную на полуинтервале $[0, 1)$ следующим образом. Пусть $x = 0,\overline{x_1x_2x_3\dots}$ — троичная запись числа $x \in [0, 1)$. Возьмём наименьшее такое k , что $x_k = 1$, и рассмотрим число $y = 0,\overline{x_1x_2\dots x_k}$. Если в троичной записи x не встречаются единицы, то положим $y = x$. Затем заменим в троичной записи y все цифры 2 на 1. Получим число $z = 0,\overline{z_1z_2z_3\dots}$, где все z_i — нули или единицы. Тогда $\varphi(x)$ — это такое число, что его двоичная запись совпадает с $0,\overline{z_1z_2z_3\dots}$.

Например, для нахождения $\varphi(1/2)$, запишем число $1/2$ в троичной системе счисления. Получится $0,1111\dots = 0,(1)$. (Проверьте!) Тогда $y = 0,1$ и $z = 0,1$ и $\varphi(x) = 1/2$.

Аналогично $\varphi(0,020212021)$ вычисляется так: $y = 0,02021$, $z = 0,01011$ и $\varphi(z) = 1/4 + 1/16 + 1/32$.

- (а) Найти, чему равняется значение φ на интервале $(1/3, 2/3)$.
- (б) Чему равняется значение φ на интервалах, выкидываемых из отрезка $[0, 1]$ при построении K_2 ?
- (с) Построить график φ .
- (д) Доказать, что φ непрерывна.
- (е) В каких точках φ является дифференцируемой? Чему равна её производная?