Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Доп. главы теории дифференциальных уравнений (http://math-info.hse.ru/s14/u)
Линейные потоки на торе и повороты окружности (6 марта 2015)
И. В. Щуров

Определение 1. Рассмотрим отображение T некоторого множества X в себя. Точка $x \in X$ называется *периодической точкой* отображения T с периодом n, если $T^n(x) = x$, где T^n — композиционная степень отображения T. Минимальное такое число n, что $T^n(x) = x$, называется *минимальным* периодом этой точки. Иногда слово «минимальный» опускают.

Определение 2. Два числа x и y называются *сравнимыми по модулю* s, если их разность кратна s. Пишут:

$$x = y \pmod s$$

Если мы возьмём прямую $\mathbb{R}$ и отождествим на ней точки, сравнимые по какому-то фиксированному модулю, то получится окружность (длина которой равна этому модулю). Например, в случае стандартной окружности длины 2π, мы не различаем углы, отличающиеся на 2π.

Определение 3. Рассмотрим непрерывное отображение окружности длины 1 в себя $f\colon S^1 \to S^1$. Её *поднятием* на прямую $\mathbb{R}$ называется такое непрерывное отображение $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$ и $f(x) = \tilde{f}(x) \pmod 1$ для всех точек x.

Задача 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение на двумерном торе:

$$\dot{x} = a, \quad \dot{y} = b, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2,$$

где $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ и S^1 — окружность длины 1 (можно представлять её как отрезок $[0,1]$ со склеенными концами). Рассмотрим трансверсаль $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = 0\}$ и отображение Пуанкаре $P\colon \Gamma \to \Gamma$.

(a) Доказать, что отображение Пуанкаре P является поворотом на некоторый «угол»[1] α, то есть отображением вида $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$.
(b) Выразить α через a и b.
(c) Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$ — рациональное число. Найти все периодические точки отображения R_α. Найти их минимальные периоды.
(d) Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — иррациональное число. Найти все периодические точки отображения R_α.

Задача 2. Рассмотрим поворот R_α на «угол» α, где $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Пусть x_0 — некоторая точка окружности S^1 и $x_n = R^n(x_0)$ для всех натуральных n.

(a) Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ среди точек $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ найдутся две такие точки x_k и x_l, что расстоение между ними будет меньше ε. Подсказка: 1) разбить окружность на дуги длины меньше ε; 2) ждать подходящего момента.
(b) Доказать, что для всякой дуги $U_{2\varepsilon}$ длины 2ε найдётся точка x_k, лежащая в $U_{2\varepsilon}$.
(c) Найти $\omega_{R_\alpha}(x_0)$.
(d) Найти ω-предельное множество какой-нибудь точки x для соответствующего векторного поля на торе.
(e) Выполняется ли для тора теорема Пуанкаре — Бендиксона? Если да, доказать её. Если нет, объяснить, где «ломается» доказательство, которое работает для плоскости.

Определение 4. Отображение окружности называется *сохраняющим ориентацию*, если её поднятие монотонно возрастает.

Задача 3. Доказать, что

(a) если сохраняющее ориентацию непрерывное отображение окружности имеет неподвижную точку, то оно не имеет периодических точек с минимальным периодом больше 1;
(b) все периодические точки сохраняющего ориентацию непрерывного отображения окружности имеют одинаковый минимальный период;

Верно ли последнее утверждение для отображений окружности, не сохраняющих ориентацию?

[1] На самом деле, это не угол, а длина дуги, он меняется от 0 до 1