

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год**Доп. главы теории дифференциальных уравнений** (<http://math-info.hse.ru/s14/u>)**Теорема Пуанкаре — Бендиксона (27 февраля 2015)***И. В. Щуров*

Во всех задачах рассматривается векторное поле на плоскости или в области на плоскости.

Задача 1. Пусть $A \subset X$ — некоторое подмножество фазового пространства X . Обозначим через $\omega(A)$ множество омега-предельных точек для всех траекторий с начальным условием в A , то есть

$$\omega(A) = \{\omega(x) : x \in A\}.$$

- (a) Верно ли, что всегда $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$?
- (b) Доказать, что $\omega(\omega(x)) \subset \omega(x)$.

Задача 2. Доказать теорему Пуанкаре — Бендиксона в следующей формулировке: пусть $\omega(x)$ не содержит ни одной особой точки векторного поля. В этом случае $\omega(x)$ — замкнутая траектория. Обязательно ли она является предельным циклом?

Задача 3. Пусть $y_0 \in \omega(x_0)$ и траектория, проходящая через y_0 , не является замкнутой. Рассмотрим трансверсаль I к векторному полю, проходящую через точку y_0 . На лекции мы доказали, что существует последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \rightarrow y_0$, принадлежащих фазовой кривой точки x_0 и лежащих на отрезке I , причём по одну сторону от y_0 . Без ограничения общности, считаем, что пересекают слева. Пусть траектория, проходящая через y_0 , возвращается в некоторую малую окрестность y_0 . Доказать, что в этом случае она не может пересечь I также слева от y_0 . (Этот момент на лекции был кратко проговорён, но нужно привести аккуратную картинку и сослаться на лемму Жордана.)

Задача 4. Пусть уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт некоторую замкнутую связную гладкую кривую γ на фазовом пространстве $X \subset \mathbb{R}^2$, причём внутренность этой кривой задаётся неравенством $f(x, y) < 0$. Доказать, что если $L_v f(x, y) < 0$ для всех точек $(x, y) \in \gamma$, то область, ограниченная γ , является ловушкой (поглощающей областью) для векторного поля v — то есть любая траектория, входящая в эту область, никогда из неё не выйдет.

Задача 5. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) + \frac{1}{20} \sin x; \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) - \frac{1}{20} (e^{(x+y)/10} - 1). \end{cases} \quad (1)$$

Доказать, что у неё имеется предельный цикл, лежащий в круге $\{x^2 + y^2 < 2\}$.

Задача 6. Пусть (x_*, y_*) — особая точка векторного поля v и пусть существует такая гладкая функция f , что $f(x_*, y_*) = 0$, $f(x, y) > 0$ для любой точки $(x, y) \neq (x_*, y_*)$, $\nabla F \neq 0$ для любой точки $(x, y) \neq (x_*, y_*)$ и $L_v f < 0$ для всех точек из некоторой окрестности (x_*, y_*) . Доказать, что в этом случае (x_*, y_*) устойчива по Ляпунову.